Die Kettenkurve — Oder wie ein Mathematiker ankert

Mathias Wagner

mathias.wagner.hh@web.de

1 Einleitung

Über das richtige und sichere Ankern ist schon viel geschrieben worden. Im *Segler Lexikon* von Joachim Schult, erschienen in Delius Klasing, 2008, findet man unter dem Eintrag "Kettenkurve" eine kurze Beschreibung, die mit der Empfehlung endet, die vierfache Wassertiefe als Kettenlänge sei optimal. Bobby Schenk, *Ankern*, ebenfalls erschienen in Delius Klasing, 2009, ist schon etwas differenzierter und empfiehlt im Allgemeinen die fünffache Wassertiefe, und nur bei großen Wassertiefen von 20 m und mehr, reicht die dreifache Wassertiefe als Kettenlänge aus. Einen anderen Ansatz verfolgen Sönke und Judith Roever sowohl auf deren Webseite `https://www.blauwasser.de/ankern`, als auch in ihrem Buch *Blauwasser Segeln Kompakt*, erschienen in Delius Klasing, 2015: Zumindest bei größeren Wassertiefen ist ihre Empfehlung Kettenlänge = Wassertiefe + Konstante, wobei die Konstante zwischen 25 und 35 Metern liegt.

Dies sind alles sehr wertvolle Beiträge, aber als technisch versierte Person hatte es mich immer verwundert, dass es meist nur solche doch recht vagen Aussagen zur benötigen Kettenlänge gibt, und diese z.B. die Windstärke und das Gewicht der Kette vollkommen ignorieren. Dabei muss es doch zumindest bei der Britischen Admiralität und anderen großen seefahrenden Nationen seit Jahrhunderten genauere Vorschriften geben, wie lang eine Ankerkette zu sein hat. Einer der wenigen frühen, öffentlich verfügbaren technischen Beiträge stammt von Peter Smith `https://www.petersmith.net.nz/boat-anchors/catenary.php`, aber dort werden im wesentlichen nur numerische Ergebnisse zu Computer Simulationen gezeigt, und es ist nicht einfach, diese auf das eigene Schiff zu übertragen. Das zugrunde liegende Model bleibt verborgen.

In der November Ausgabe 407/2000 des Practical Boat Owners beschreibt Joe Lamb im Artikel *Use only as much chain as you need* einige wesentliche Grundzüge der Kettenkurve und was dies für das Ankern bedeutet. Insbesondere weist er darauf hin, dass die Regel einfach ein Vielfaches der Wassertiefe als Kettenlänge zu nehmen keine gute Ankerempfehlung ist und insbesondere beim Ankern in tiefem Wasser die benötigte Kettenlänge überschätzt. Von Alain Fraysse gibt es eine sehr schöne Web Page, auf der das Thema Ankern ausführlich behandelt wird: `http://alain.fraysse.free.fr/sail/rode/rode_b.htm`. Dort findet man auch Excel Tabellen, mit denen man Simulationen basierend auf der korrekten Kettenkurve durchführen kann. Schliesslich hat Harald Melwisch das Thema Ankern in der Zeitschrift Palstek behandelt: *Ketten, Leinen und*

Wasseriefe, 05/2007, und *Buganker und Heckleinen*, 06/2007. Er ist meines Wissens der Erste, der darauf hinweist, dass Ankern in zu flachem Wasser gefährlich sein kann, wenn man die Effekte beim sogenannten dynamischen Ankern mit berücksichtigt.

Ein großer Teil dieser Literatur war mir zu Beginn meiner Arbeiten zu diesem Thema leider nicht bekannt. In diesem Beitrag möchte ich eine kohärente Theorie einiger Aspekte des Ankerns präsentieren. Mein Hauptaugenmerk liegt hier auf der klaren Darstellung der zugrunde liegenden Modelle und der Erarbeitung relativ einfacher Formeln, mit denen man in der Praxis etwas anfangen kann. Formeln sind gut, aber aus dem Kontext gerissen manchmal auch gefährlich. Deshalb soll die Darstellung der Modelle dem Leser helfen, die Anwendungsbereiche dieser Formeln und deren Grenzen zu erkennen. Die Ergebnisse des dynamischen Ankerns sind sehr vergleichbar mit denen von Harald Melwisch, jedoch mit dem Vorteil, durch einfache Formeln ausgedrückt werden zu können.

Um es gleich klarzustellen — ich mache hier keinerlei Aussagen zur Haltekraft von Ankern — dazu gibt es einschlägige Praxistests — es geht nur um die "wirklich" minimal benötigte Kettenlänge zum Ankern, wenn der Anker als haltend angenommen wird, und die Kette (immer noch) waagerecht am Anker ansetzen soll, um dessen Haltekraft nicht zu schmälern. Diese minimal benötigte Kettenlänge wird von der Wassertiefe, aber auch von der Windstärke abhängen. Dies ist das sogenannte statische Ankern und wird in den ersten Kapiteln ausführlich behandelt. Das Ergebnis ist überraschend einfach, $L = \sqrt{Y(Y + 2a)}$, wobei L die benötigte Kettenlänge ist, Y die Ankertiefe, und a ein Parameter, der vom Schiff und der Windstärke abhängt, aber nur einmal tabelliert werden muss. Den Einfluss von Wellen und Schwell berücksichtigen wir im Kapitel 8 zum dynamischen Ankern als einen zuäztlichen Energieeintrag in das System Schiff / Ankergeschirr. Auch hier finden wir eine recht einfache Formel, um die das Ergebnis des statischen Ankerns korrigiert werden muss. Beim dynamischen Ankern muss man gerade im flachen Wasser auch immer die am Anker angreifende Kraft im Auge behalten. Alle diese Formeln kann man einmal für sein Schiff tabellieren. Es wird also niemand gezwungen, mit einem Taschenrechner in der Hand das Ankermanöver zu fahren.

Als Spezialfall dieser allgemeinen Kettenkurve findet sich für das statische Ankern auch die obige Regel "X Meter Kette pro Meter Wassertiefe" wieder. Sie beschreibt letztendlich nur den Extremfall einer vollkommen gestrafften Kette bei Sturm, wenn die Kette nicht mehr waagerecht am Anker angreift, sondern mit der Steigung 1 : X. Die Roever'sche Faustformel findet man als Näherung für große Ankertiefen und moderaten Wind wieder, wobei der genaue Wert der Konstanten sowohl von der Größe des Schiffes als auch von der Windstärke abhängt.

Als eine wichtige Kenngröße erweist sich auch die Elastizität der Kette, die als Ableitung ihrer potentiellen Energie nach der Windkraft definiert ist. Hiermit lässt sich leicht verstehen, wann eine Kette gut funktioniert, und wann nicht — siehe Kapitel 7.

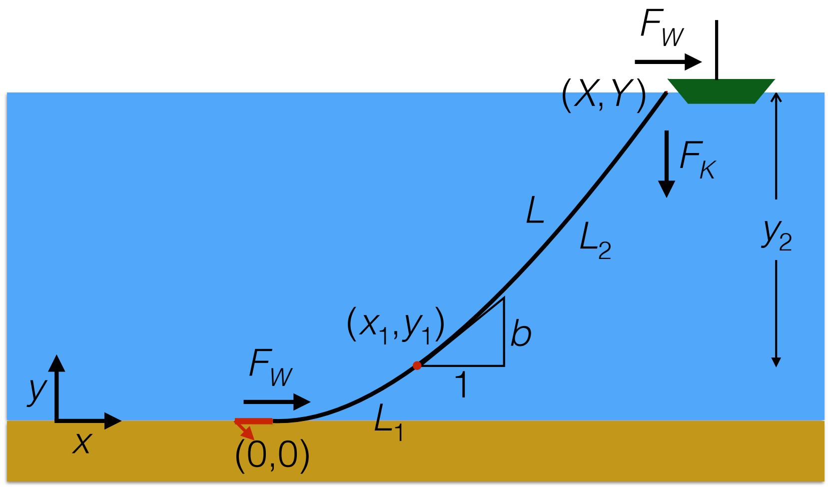

Fig. 1. Die minimal benötigte Ankerkettenlänge L bei maximaler Haltekraft des Ankers in Wassertiefe Y ergibt sich, wenn die Kette schon nicht mehr am Meeresboden aufliegt, aber am Anker noch immer genau waagerecht angreift. F_W ist die am Schiff angreifende Windkraft und F_K das Gewicht der Kette im Wasser. Der Punkt (x_1, y_1) ist gedacht zur Diskussion eines Ankers, an dem die Kette nicht mehr waagerecht angreift, sondern mit einer Steigung b. In diesem zweiten Fall ist die Ankertiefe nur noch y_2.

2 Etwas Mathematik

Die Fragestellung, wie eine Kette unter dem Einfluss der Schwerkraft durchhängt, ist schon seit vielen Jahrhunderten erforscht und gelöst. Schon Christiaan Huygens und Johann Bernoulli haben sich hiermit 1690/91 beschäftigt, `https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenlinie_(Mathematik)`. Es ist ein Problem der Variationsrechnung in der Mathematik und eine gern gestellte Übungsaufgabe in der Theoretischen Mechanik im Physikstudium, welches wir hier aber nicht lösen wollen. Es stellt sich heraus, dass eine Kette, ein Tau, etc., unter dem Einfluss der Schwerkraft immer die gleiche prinzipielle Form annimmt,

$$y(x) = y_0 + a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right), \tag{1}$$

welche deshalb auch häufig Kettenkurve genannt wird. Die Parameter a, x_0 und y_0 sind noch zu bestimmen, und der Ausdruck cosh() beschreibt die sogenannte

Table 1. Winddrücke auf eine Fläche mit $c_p = 1$ bei 20°C auf Meereshöhe. Im Vorgriff auf Gleichungen (7) und (8) ist auch noch der Parameter a für eine 10 mm Stahlkette und $A_{\text{eff}} = 5\,\text{m}^2$, $A_{\text{eff}} = 7.5\,\text{m}^2$, sowie $A_{\text{eff}} = 10\,\text{m}^2$ aufgeführt. Andere Werte des Parameters a erhält man durch lineare Interpolation von A_{eff}. Alle Werte beziehen sich immer auf die am *oberen Ende* des jeweiligen Beaufort Bereiches wirkenden Kräfte.

Windstärke in Beaufort	Winddruck in N/m^2	a in m für 10 mm Kette		
		$A_{\text{eff}} = 5\,\text{m}^2$	$A_{\text{eff}} = 7.5\,\text{m}^2$	$A_{\text{eff}} = 10\,\text{m}^2$
0	0.03			
bis 1	1.4			
bis 2	6.6	1.7	2.5	3.4
bis 3	17.6	4.5	6.7	9.0
bis 4	37.6	9.6	14.4	19.2
bis 5	68.9	17.6	26.3	35.1
bis 6	114.6	29.2	43.8	58.4
bis 7	176	44.9	67.3	89.7
bis 8	258	65.7	98.6	131.5
bis 9	367	93.5	140.3	187.1
bis 10	499	127.2	190.7	254.3

cosinus hyperbolicus Funktion, welche für $(x - x_0)^2 \ll 5a^2$ in erster Näherung eine Parabel ist. [Das Zeichen $\ll$ bedeutet "sehr viel kleiner als".]

Es ist leicht einzusehen, dass eine idealisierte Ankerkette auch immer diese Form annehmen muss. Eine solche Ankerkette besitzt in erster Näherung eine konstante Masse m pro laufendem Meter, auf welche die Schwerkraft wirkt, und sie muss — bei Vernachlässigung des Wellengangs — die am Schiff angreifende horizontale Windkraft von ihrem einen Ende in den Anker am anderen Ende der Kette umleiten. Dabei kann die Kette an jedem Punkt immer nur Kräfte entlang ihrer dortigen Richtung aufnehmen und weitergeben, es können also insbesondere keine seitlichen Querkräfte aufgenommen werden, und aus genau dieser Eigenschaft heraus ergibt sich ihre charakteristische Form.

Im Folgenden wollen wir die minimal benötigte Kettenlänge L bestimmen als Funktion der Wassertiefe Y am Ort des Ankers, des Gewichts F_K der Kette und der Windkraft F_W, die auf das Schiff einwirkt — und zudem unter der vereinfachenden Annahme, dass es keinerlei Wellengang gibt. Die Haltekraft des Ankers soll noch nicht beeinträchtigt sein, also muss die Kette gerade so lang sein, dass sie eben nicht mehr auf dem Meeresboden herumliegt, aber immer noch waagerecht am Anker angreift. In diesem Fall sitzt der Anker im Minimum der cosh() Funktion, also bei x_0, wo die Steigung dieser Funktion verschwindet, und wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ setzen, wie in Abb. 1 veranschaulicht. Hervorzuheben ist, dass in diesem Fall die Kette immer noch exakt waagerecht am Anker angreift und somit der Anker maximal halten kann. In diesem kleinen Detail liegt Bobby Schenk falsch, wenn er in seinem ansonsten sehr schönen Buch zum Ankern auf Seite 16 unten behauptet, dass eine Kette unendlich lang sein müsste, um waagerecht am Anker angreifen zu

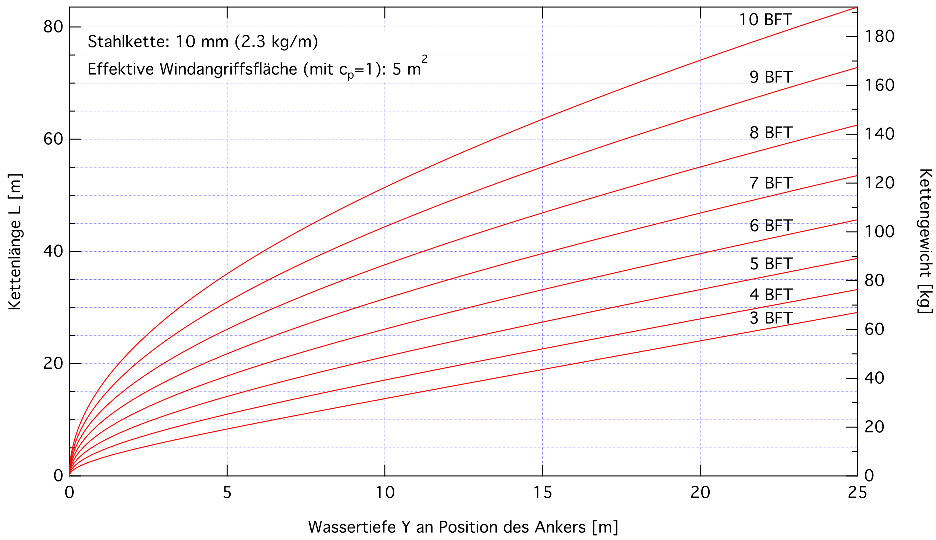

Fig. 2. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 5\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\mathrm{kg/m}$

können. Dem ist einfach nicht so. Aber sie müsste schon sehr lang werden, wenn es so richtig bläst...

Wie bestimmen wir nun die Parameter a und y_0? Am einfachsten legen wir das Koordinatensystem so, dass am Anker $x = 0$ und $y = 0$ ist, siehe Abb. 1, womit sich wegen $\cosh(0) = 1$

$$y(x) = a\left[\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right] \tag{2}$$

ergibt. Mit Großbuchstaben X und Y bezeichnen wir nun den Punkt, an dem die Ankerkette die Wasseroberfläche durchbricht. Damit ist X etwas kleiner als der vom Schiff benötigte Schwoikreisradius. Die Kettenlänge bis zu diesem Punkt (X, Y) errechnet sich als

$$L(X) = a \sinh\left(\frac{X}{a}\right). \tag{3}$$

Durch geschicktes Quadrieren beider Gleichungen und Umstellen erhält man unter Zuhilfenahme von $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für beliebiges z,

$$L(Y) = \sqrt{(Y + a)^2 - a^2} = \sqrt{Y(Y + 2a)}. \tag{4}$$

Dies ist das erste zentrale Ergebnis dieses Beitrages. Für $a^2 \ll (Y+a)^2$, also sehr große Wassertiefen oder sehr geringe Windkräfte, gilt damit in erster Näherung wie erwartet $L \approx Y + a$. Die Kette hängt also fast senkrecht nach unten. Dies hat

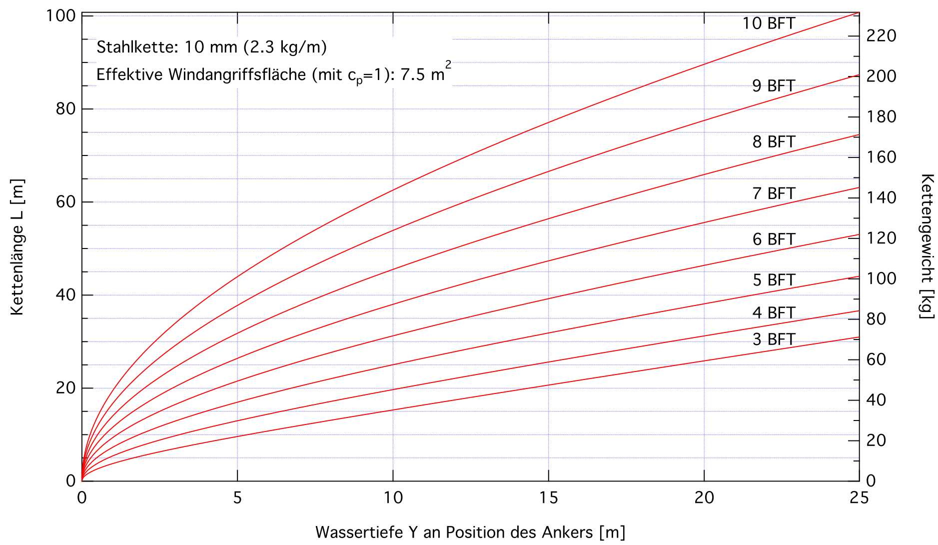

Fig. 3. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 7.5\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\text{kg/m}$

im Grunde genommen Ähnlichkeit mit der Roever'schen Faustformel auf S. 112 ihres Buches, $L = Y + 5\,\text{m} + 20...30\,\text{m}$, wenn wir $a \approx 25...35\,\text{m}$ ansetzen. Da — wie im Folgenden ersichtlich werden wird — der Parameter a jedoch von der Größe des Schiffes und von der Windstärke abhängt, muss man diese Roever'sche Formel immer auf das eigene Schiff und die jeweilige Situation anpassen — und sie ist nur eine Näherung. Im umgekehrten Grenzfall für $2a \gg Y$, also bei Sturm und/oder sehr geringer Ankertiefe, erhalten wir in erster Näherung $L \approx \sqrt{2aY}$. In diesem Fall nimmt die benötigte Kettenlänge also nur mit der Wurzel der Wassertiefe zu. Auch hier ist es also besser, bei geringer Wassertiefe zu ankern, aber der Effekt ist relativ schwach: Wenn die Ankertiefe auf ein Viertel abnimmt, verringert sich die benötigte Kettenlänge nur auf die Hälfte. In keinem Szenario nimmt die Kettenlänge jedoch mit der dreifachen Wassertiefe zu. $L = 3Y$ gilt z.B. nur für einen einzigen Punkt auf der Kettenkurve, $Y = a/4$. Im allgemeinen Fall erhält man nach Lösen der quadratischen Gleichung (4) wieder eine nicht–lineare Abhängigkeit zwischen Kettenlänge und Ankertiefe,

$$Y(L) = \sqrt{L^2 + a^2} - a. \tag{5}$$

Mit dieser Formel kann ich also bei gegebener maximaler Kettenlänge und gegebenem Parameter a die maximal mögliche Ankertiefe Y errechnen, bei der die Kette immer noch waagerecht am Anker angreift.

Wie bestimmen wir nun den verbleibenden Parameter a? Zunächst ist die Ableitung der Kettenkurve, Gl. (2), bei Punkt (X, Y) wegen fehlender Querkraft

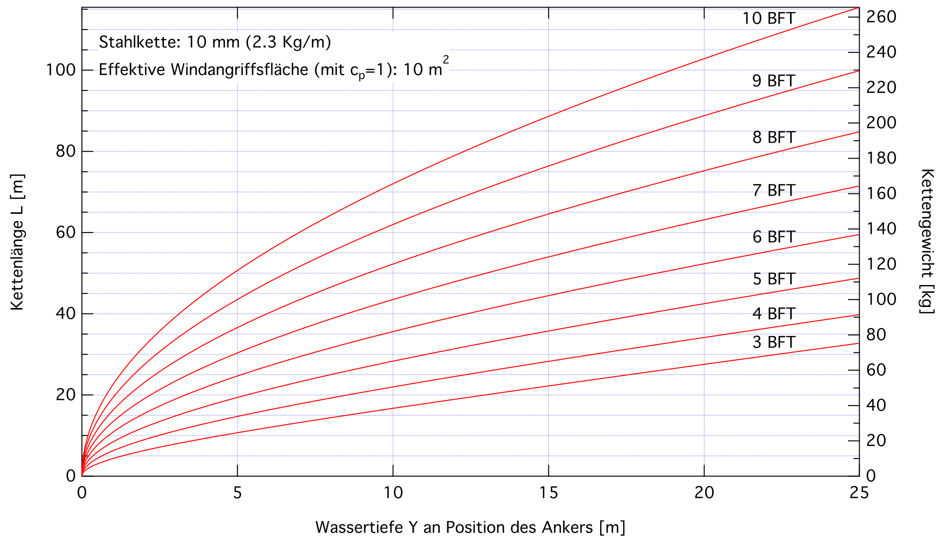

Fig. 4. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 10\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\text{kg/m}$

gegeben durch ein Kräfteparallelogramm, genauer gesagt dem Verhältnis von Kettengewicht zu Windkraft,

$$y'(X) = \sinh\left(\frac{X}{a}\right) = -\frac{F_K}{F_W}, \tag{6}$$

wobei $F_K = -Lmg$ das Gesamtgewicht der Kette vom Anker bis zum Punkt (X, Y) ist, mg das Gewicht der Kette pro laufendem Meter im Wasser, also um den Auftrieb im Wasser reduziert, F_W die angreifende Windkraft, und wie üblich $g = 9.81\text{m/s}^2$, die Gravitationsfeldstärke auf der Erdoberfläche.

Aus den beiden Gleichungen (3) und (6) ergibt sich durch Einsetzen und Eliminieren von L der verbleibende Parameter a zu

$$a = \frac{F_W}{mg}, \tag{7}$$

also dem Verhältnis von Windkraft zu spezifischem Gewicht der Kette pro laufendem Meter im Wasser. Damit haben wir alle Kettenparameter vollständig bestimmt. Die einzige Unbekannte ist nun die am Schiff angreifende Windkraft F_W. Laut `https://de.wikipedia.org/wiki/Winddruck` können wir dafür

$$F_W = c_p A\, p_{\text{stau}} = A_{\text{eff}}\, p_{\text{stau}} \tag{8}$$

setzen, wobei A die Angriffsfläche ist, die das Schiff dem Wind bietet, c_p der Druckbeiwert ist, der die Windschnittigkeit des Schiffes beschreibt und p_{stau}

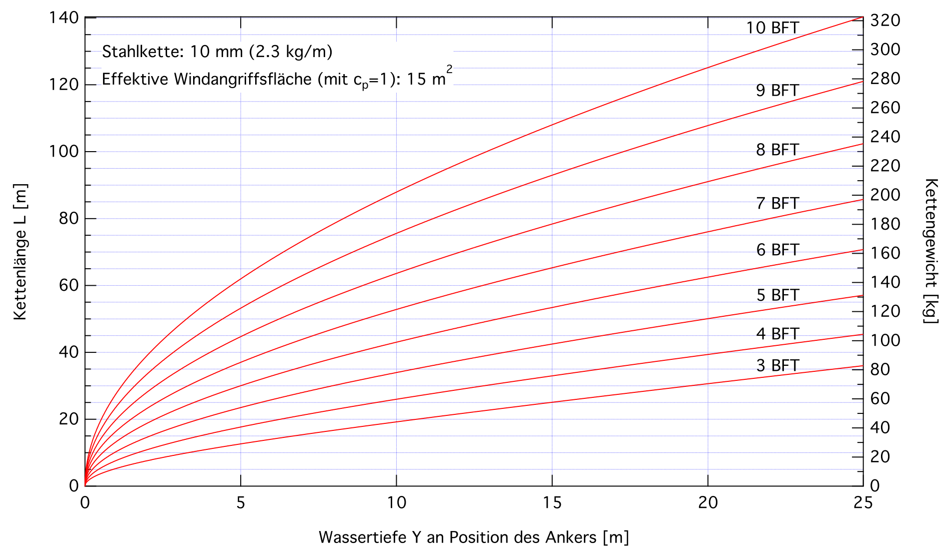

Fig. 5. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 15\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\text{kg/m}$

der Staudruck des Windes auf eine senkrechte Fläche ist. Letztendlich interessiert uns jedoch nur das Produkt $A_{\text{eff}} = c_p A$, welches wir als eine effektive Windangriffsfläche des Schiffes interpretieren können, die wir entweder schätzen müssen, oder auch experimentell bestimmen können — siehe weiter unten. Der Staudruck hängt von der Stärke des Windes w (in m/s) über $p_{\text{stau}} = 0.602 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\, w^2$ ab. In `https://de.wikipedia.org/wiki/Winddruck` finden wir Angaben bezogen auf die Beaufort Skala — in Tabelle 1 wiedergegeben — wobei hier immer der Staudruck am *oberen Ende* des jeweiligen Beaufort Bereiches angegeben ist, und hiermit ist auch jeweils der Parameter a berechnet worden.

Die Kettenkurve ist damit nur vom Parameter $a = (A_{\text{eff}}\, p_{\text{stau}})/(mg)$ abhängig, also dem Verhältnis von der am Schiff angreifenden Windkraft zum Kettengewicht pro laufendem Meter im Wasser. Bei der Bestimmung von A_{eff} sollte man berücksichtigen, dass der Wind in der Regel nicht strikt von vorne kommt, sondern aufgrund der Schiffsbewegung auch manchmal in einem Winkel von 30° und mehr anliegen kann, was die Projektionsfläche entsprechend vergrössert.

Die bis hierher dargelegte Theorie und das ihr zugrunde liegende Model beschreiben das statische Ankern bei Wind (auch einer Böe), jedoch ohne jegliche Schiffsbewegung aufgrund von Wellengang.

3 Beispiele für Statisches Ankern

Im Folgenden haben wir die benötigte minimale Kettenlänge L für einige gebräuchliche Kettenstärken, verschiedenen effektiven Windangriffsflächen A_{eff} und

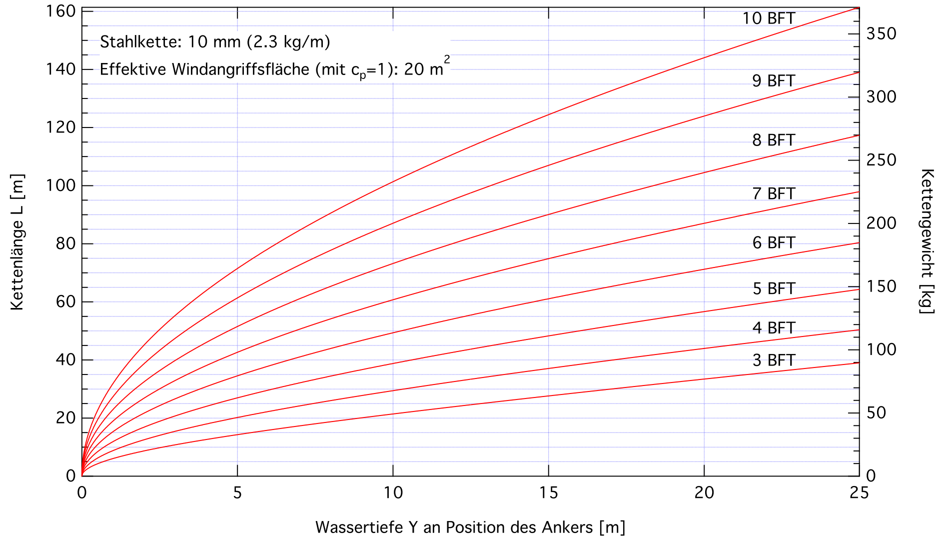

Fig. 6. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 20\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\text{kg/m}$

Windstärken 3 – 10 Bft mit Hilfe von Gleichungen (4) und (7) geplottet. Wie vorher angemerkt ist dies immer die Länge $L(Y)$ bis zu dem Punkt (X, Y) in Abb. 1, an dem die Ankerkette die Wasseroberfläche durchbricht, und es sind demzufolge in Abhängigkeit vom Freibord des Schiffes und des Winkels, mit dem die Kette aus dem Wasser kommt, noch einige Meter Kette hinzuzuaddieren, um die benötigte Gesamtkettenlänge zu erhalten. Oder man rechnet die Wassertiefe Y einfach von der Höhe des Bugs aus — der kleine Fehler, dass die Kette auf dem Stück bis zur Wasseroberfläche schwerer ist als im Wasser, fällt nicht ins Gewicht.

Abb. 2 gilt für ein kleineres Schiff mit einer effektiven Windangriffsfläche von nur $A_{\text{eff}} = 5\,\text{m}^2$ und einer für ein so kleines Schiff etwas überdimensionierten 10 mm Stahlkette, welche an Land ein Gewicht von 2.3 kg/m für den laufenden Meter hat. Wenn ich also z.B. auf einer Wassertiefe von 15 Metern ankern möchte, bei 7 Bft Wind, dann benötige ich mindestens 40 Meter Kette bis zur Wasseroberfläche, also etwas weniger als das Dreifache der Wassertiefe. Bei 9 Bft Wind sind es schon 55 Meter Kette, und damit deutlich mehr als das Dreifache der Wassertiefe. Die Regel “3 Meter Kette pro Meter Wassertiefe” ist also nicht differenziert genug und berücksichtigt nicht den Einfluss des Windes. Natürlich ist es ratsam, als Windstärke nicht die mittlere Windstärke zu verwenden, sondern die Stärke der größten zu erwartenden Böen. Desweiteren sieht man in diesen Abbildungen auch sehr schön, dass für sehr kleine Wassertiefen die Kettenlänge mit der Wurzel der Ankertiefe steigt, während bei großen Wassertiefen

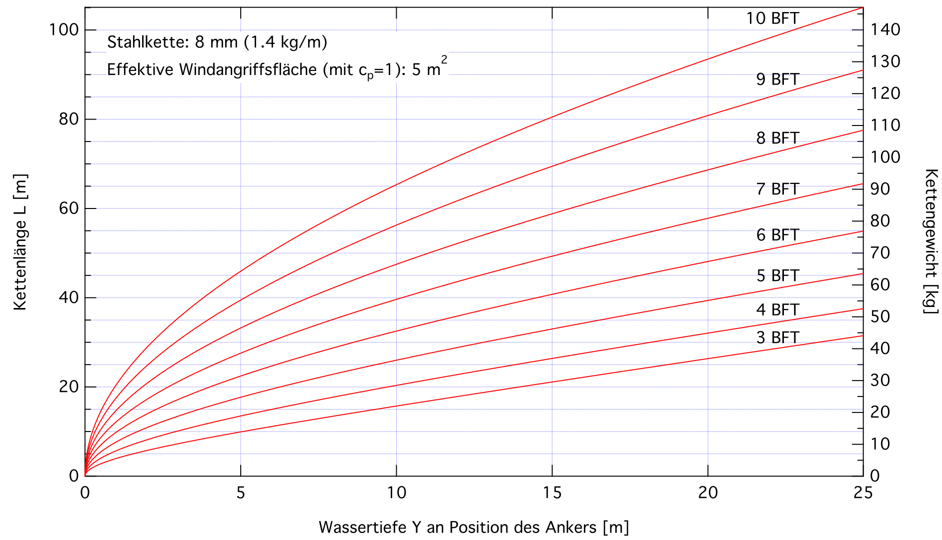

Fig. 7. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 5\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1.22\,\mathrm{kg/m}$

die Kurve sich asymptotisch einer geraden Linie mit einem konstanten Offset annähert — der Roever'schen Faustformel.

In Abb. 2 – 6 sind entsprechende Kurven für verschiedene effektive Windangriffsflächen A_{eff} bis zu $20\,\mathrm{m}^2$ geplottet, alle für eine 10 mm Stahlkette. Auf der linken Skala ist immer die benötigte Kettenlänge angegeben und auf der rechten Skala das dazu entsprechende Gewicht dieser Kette. Logischerweise benötigen größere Schiffe bei gleicher Kettenstärke längere Ketten, um auf der gleichen Ankertiefe ankern zu können. So muss man bei einem Schiff mit $A_{\mathrm{eff}} = 20\,\mathrm{m}^2$ — was vielleicht einem ausgewachsenen Katamaran entspricht — und wie im obigen Beispiel 15 Meter Ankertiefe, 7 Bft Wind, schon 75 Meter Kette stecken, also fast doppelt so viel Kette wie bei dem kleinen Schiff von Abb. 2 mit nur $A_{\mathrm{eff}} = 5\,\mathrm{m}^2$. Bei 20 Metern Ankertiefe sind es gut 87 Meter Kette. Die Regel "Auf der Blauwasserroute braucht man mindestens 70 Meter Kette" ist also mit etwas Vorsicht zu genießen. Es hängt schlichtweg von der Größe des Schiffes ab — und von der verwendeten Kettenstärke. Je größer das Schiff und je leichter die Kette, desto länger muss die Kette sein.

In Abb. 7 – 10 sind dazu einige Ergebnisse geplottet für 8 und 13 mm Stahlketten. Bei ansonsten gleichen Bedingungen reduziert sich die minimale Kettenlänge L etwas, wenn man eine dickere und damit schwerere Kette wählt und umgekehrt. Dies sollte jedoch nicht zu dem Trugschluss verleiten, besonders dicke Stahlketten zu verwenden, um so Kettenlänge und damit vermeintlich Kettengewicht zu sparen, weil dieser Effekt zu schwach ist, das Gewicht einer dickeren Kette zu kompensieren. Dies kann man auch an den jeweils rechten

Skalen der Abbildungen gut sehen. Es ist also besser, eine möglichst hochwertige Kette mit hoher Bruchlast zu verwenden, die dann entsprechend dünner sein kann. Das spart trotz längerer Kette am Gesamtgewicht. Allerdings wird der Schwoikreisradius X damit dann auch größer, was bei einigen Ankerplätzen zu Problemen führen kann. Bei gleicher Ankertiefe und gleicher Kettenstärke benötigt ein großes Schiff einen größeren Schwoikreisradius als ein kleines Schiff, einfach weil es mehr Kette braucht. Dies ist bei der Einschätzung von Nachbarn am Ankerplatz und dem eigenen Abstand zu denselbigen mit zu berücksichtigen.

Abschließend — und mehr zur Abschreckung — seien auch noch einmal die entsprechenden Kurven einer Bleiankerleine gezeigt. Dies sind normale Trossen, in die etwas Blei eingearbeitet ist — entweder entlang der ganzen Trosse, oder nur für die ersten paar Meter. Wir nehmen der Einfachheit halber an, das Blei ist entlang der ganzen Länge eingearbeitet. In Abb. 11 wird ersichtlich, dass schon ein sehr kleines Schiff mit $A_{\mathrm{eff}} = 3\,\mathrm{m}^2$, ausgerüstet mit einer Standard Bleiankerleine von 12 mm Querschnitt und 40 Meter Länge, wie sie z.B. von Liros angeboten wird, nur auf sehr geringen Wassertiefen ankern sollte. Unsere Dragonfly 28 Sport war mit einer solchen Ankerleine ausgestattet, und wir versuchten immer mit soviel Ankerleine wie möglich auf nicht viel mehr als 2 Meter Wassertiefe und gutem Sandgrund zu ankern — Kielschwert eingezogen. Wahrscheinlich ist hierbei ein nicht unbedeutender Sicherheitsfaktor, dass unser Delta Anker mit 10 kg überdimensioniert war, und er damit auch noch stark genug hielt, auch wenn die Bleiankerleine schon nicht mehr exakt waagerecht an ihm zog.

4 Praktische Bestimmung des Parameters a

Der eine oder andere Leser wird sich nun sicherlich gefragt haben, wie er denn die effektive Windangriffsfläche A_{eff} seines Schiffes bestimmen könnte. Zum einen kann man diese sicherlich grob abschätzen über die Projektionsfläche des Schiffes von vorne — aber unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Schiff vor Anker schwoit und somit diese Projektionsfläche manchmal auch deutlich größer sein kann — und einem angenommen Windschnittigkeitsfaktor c_p, aber es gibt auch eine genauere Methode: Hierbei ankert man bei verschiedenen Windstärken und verschiedenen Wassertiefen und misst nach (Tauchen!), wieviel Kette gesteckt werden muss, damit die Kette gerade eben nicht mehr auf dem Meeresboden aufliegt, sondern gleich am Anker anfängt, in Richtung Wasseroberfläche aufzusteigen. Der Einfachheit halber kann man natürlich auch einfach den Punkt nehmen, von dem die Kette sich vom Meeresboden abhebt: Wie tief ist das Wasser an dieser Stelle, und wieviel Kette wird von hier bis zur Wasseroberfläche gebraucht? Wenn man dies für verschiedene Windstärken und Wassertiefen — und möglichst wenig Wellengang, da sonst das dynamische Ankern aus Kapitel 7 mit reinfunkt und die Ergebnisse verfälscht — gemessen hat, dann kann man damit den windabhängigen Parameter a und letztlich A_{eff} für sein Schiff bestimmen, sich damit einmal die eigene Ankerkettenkurve für verschiedene Windstärken ausdrucken und im Schiff geeignet aufbewahren.

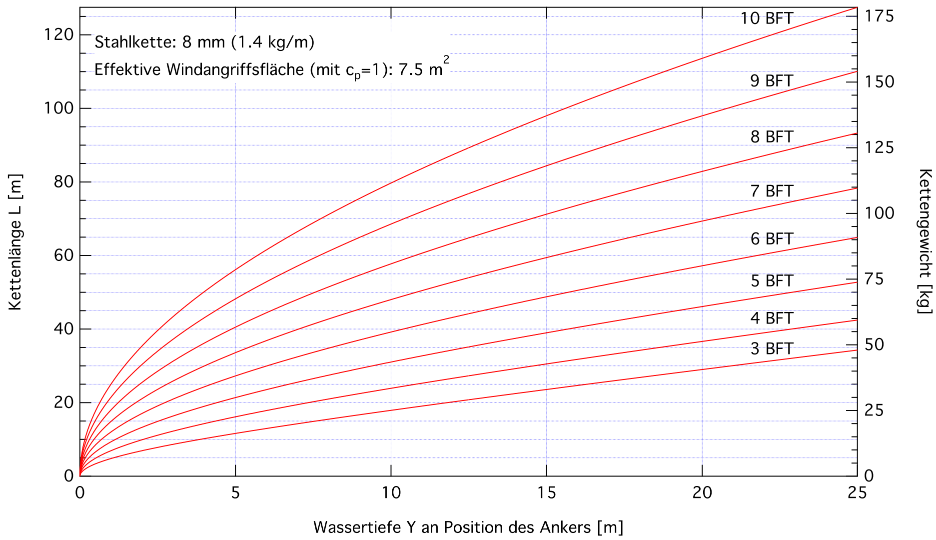

Fig. 8. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 7.5\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1.22\,\text{kg/m}$

Alternativ kann man — soweit vorhanden — eine starke Federwaage am Bug verwenden und dort die Kraft messen, die die Kette aufnimmt. Mit Gl. (35) kann man damit die am Anker angreifende Kraft errechnen, welche der Windkraft entsprechen muss. Nach Gl. (8) ergibt sich daraus letztlich das gesuchte A_{eff}.

5 Kette greift nicht waagerecht am Anker an

Man kann nun noch einen Schritt weitergehen und auch den Fall betrachten, dass die Kette nicht mehr waagerecht am Anker angreift, sondern mit einer gewissen Steigung $b : 1$. Wieviel Kette ist dann noch nötig? Anwendungen für diesen Fall wäre nicht nur, dass die Kette nicht mehr waagerecht am Anker angreift, sondern z.B. auch der Fall, dass der Untergund beim Anker abschüssig ist, wir aber immer noch fordern, dass die Kette relativ zum Anker waagerecht angreifen soll.

Es gilt nach wie vor die gleiche Kettenkurve, nur dass nun der Anker “etwas weiter oben” an der Kettenkurve in Abb. 1 angreift, sagen wir an einem Punkt (x_1, y_1), an dem die Steigung der Kettenkurve genau b beträgt. Wir müssen also nur die Länge $L_1 = L(x_1)$ der Kette von $(0, 0)$ bis zum Punkt (x_1, y_1) ausrechnen und von der Gesamtlänge L der (nun zwischen $(0, 0)$ und (x_1, y_1) fiktiven) Kette abziehen. Gleiches gilt für die Tiefe y_1.

Aus Gleichung (6) sieht man, dass für die lokale Ableitung / Steigung

$$y_1' = \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right) = b \tag{9}$$

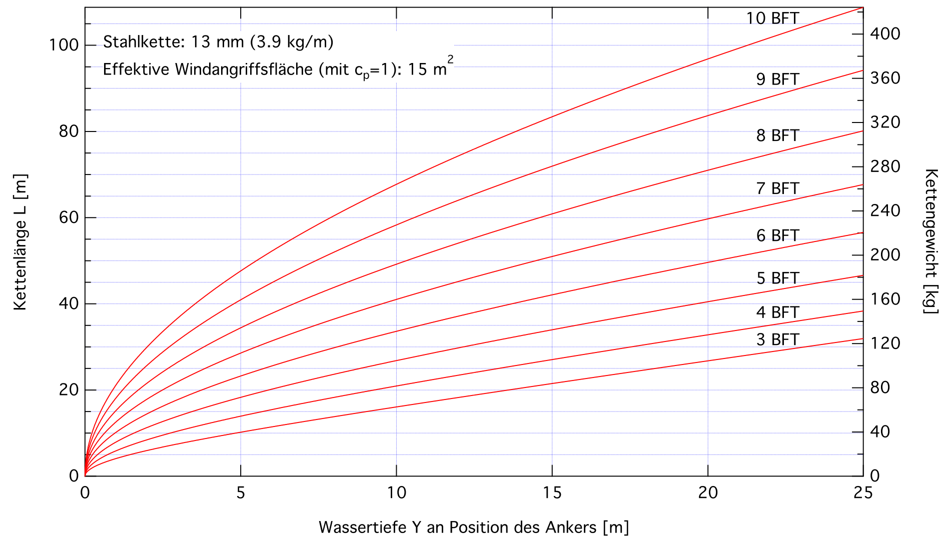

Fig. 9. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 13 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 15\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 3.4\,\text{kg/m}$

gilt und entsprechend daraus folgend

$$L_1 = a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right) = ab. \tag{10}$$

Mit Gleichung (2) erhalten wir unter Zuhilfenahme von $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

$$y_1 = a\left[\cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) - 1\right] = a\left[\sqrt{1+b^2} - 1\right] \approx \frac{ab^2}{2} = \frac{L_1 b}{2} = \frac{L_1^2}{2a}, \tag{11}$$

wobei die Näherung (ausgedrückt durch das Symbol $\approx$) für $b \ll 1$ gilt. Damit ergibt sich für einen Anker in Wassertiefe $y_2 = Y - y_1$, an dem die Kette mit Steigung $b:1$ angreift, die minimale Kettenlänge als

$$L_2 = L - L_1. \tag{12}$$

Man kann Y als die fiktive Ankertiefe interpretieren, die sich ergeben würde, wenn man die Kette auf die fiktive Länge L verlängert, um wieder einen Punkt zu finden, wo diese fiktive Kette waagerecht an einen Anker ansetzen würde.

In der Regel wird man hiermit vielleicht nicht sonderlich viel anfangen können, da nicht klar ist, wie stark die Haltekraft des Ankers beeinträchtigt wird, wenn die Kette nicht mehr waagerecht angreift. Aber z.B. im Falle der Bleiankerleine, oder aber auch generell in einem starken Sturm, wird es sich häufiger nicht vermeiden lassen, dass die Ankerleine nicht waagerecht angreift, und dann kann es

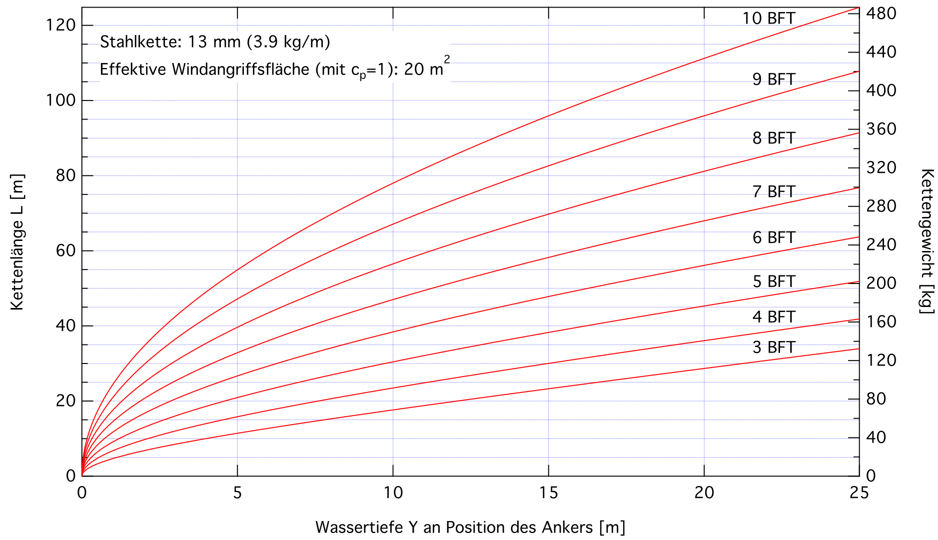

Fig. 10. Minimal benötigte Kettenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 13 mm Kette mit $A_{\text{eff}} = 20\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 3.4\,\text{kg/m}$

nützlich sein zu wissen, wieviel Ankertiefe man auf diesem Wege "gewinnen" kann — zumal wenn der Anker überdimensioniert ist.

Beispiel Bleiankerleine: Für die 12 mm Liros Bleiankerleine habe ich im Wasser ein Nettogewicht von nur 65 g pro laufendem Meter gewogen. Bei 6 Bft ergibt sich damit für $A_{\text{eff}} = 3\,\text{m}^2$ ein Wert von $a = 539\,\text{m}$. Nehmen wir nun z.B. eine Steigung von $b = 0.1$ an, also 10 cm pro Meter, dann ergibt sich mit Gleichungen (10) und (11) $L_1 = 53.9\,\text{m}$ und $y_1 = 2.7\,\text{m}$. Wenn wir eine reale Ankerleine von $L_2 = 40\,\text{m}$ zur Verfügung haben, dann ist die fiktive Kettenlänge $L = L_1 + L_2 = 93.9\,\text{m}$. Für diesen Wert ergibt sich nach Gl. (5) ein Wert von $Y = 8.1\,\text{m}$. Hiermit berechnet sich die maximale Ankertiefe zu immerhin $y_2 = Y - y_1 = 5.4\,\text{m}$. Bei einer waagerecht angreifenden Ankerleine wäre die Ankertiefe für eine 40 m Ankerleine bei 6 Bft jedoch nur 1.5 m gewesen — zu flach, selbst für einen Dragonfly 28, um ruhig schlafen zu können! Nicht zu vergessen ist in beiden Fällen, dass die hier berechnete Länge der Bleiankerleine nur bis zu dem Punkt reicht, wo sie die Wasseroberfläche durchbricht. Im vorliegenden Fall ist der Winkel der Leine aber sehr flach, und deshalb sind noch recht viele Meter Leine bis zur Klampe am Bug oder zum Hahnepot hinzuzurechnen. Oder, alternativ, zieht man die Freibordhöhe am Bug / Hahnepot von der maximalen Ankertiefe y_2 ab, auch wenn dies etwas zu konservativ ist, da die Bleiankerleine außerhalb des Wassers fast dreimal schwerer ist als im Wasser und sich somit außerhalb des Wassers deutlich stärker krümmt. Jedenfalls bleiben von den obigen 1.5 m bei unserer Dragonfly 28 mit Hahnepot dann noch so 1 m übrig zum Ankern. Mit $b = 0.1$ sind es immerhin 4.9 m.

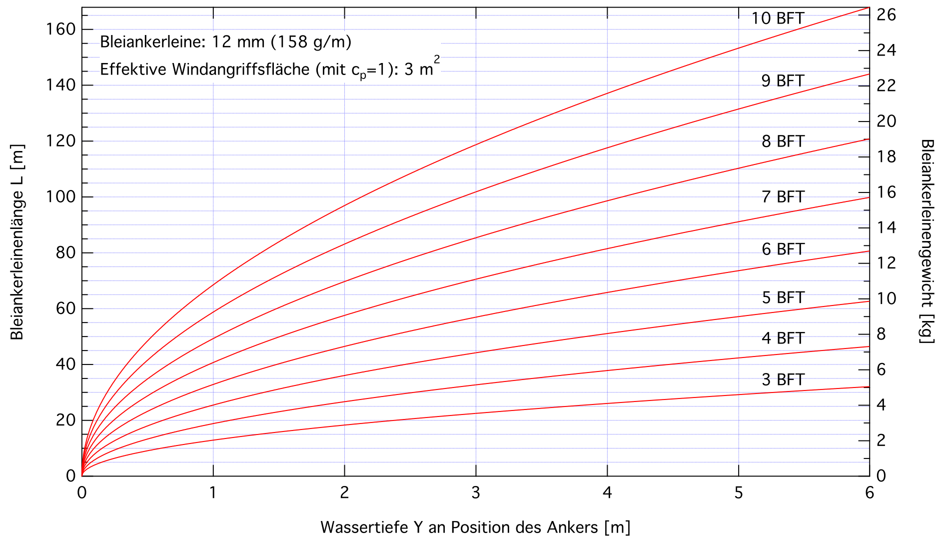

Fig. 11. Minimal benötigte Bleiankerleinenlänge L in Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 12 mm ⌀ Liros Bleiankerleine mit $A_{\text{eff}} = 3\,\text{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 65\,\text{g/m}$

Beispiel 10 mm Stahlkette mit $A_{\text{eff}} = 15\,\text{m}^2$: Es stehe wieder $L_2 = 40\,\text{m}$ Kette zur Verfügung. Mit dem gleichen Wert von b und ebenfalls 6 Bft ergibt sich zunächst $a = 87.6\,\text{m}$ und damit $L_1 = 8.8\,\text{m}$ sowie $y_1 = 0.44\,\text{m}$. Hieraus folgt eine fiktive Ankerkettenlänge von $L = L_1 + L_2 = 48.8\,\text{m}$ und somit nach Gl. (4) und (5) eine maximale Ankertiefe von $y_2 = Y - y_1 = 12.3\,\text{m}$. Eine waagerecht am Anker angreifende Kette von 40 m Länge hätte eine maximale Ankertiefe von nur 8.7 m erlaubt. Der Effekt ist also relativ betrachtet kleiner als bei der Bleiankerleine, aber immer noch relevant.

Im Extremfall eines sehr starken Sturms wird die Kette vollkommen straff gespannt sein, wodurch sich die Steigung b am Anker bis zum Bug des Schiffes fortsetzt. Dies ist das einzige Szenario, in dem es sinnvoll ist, von einem festen Verhältnis zwischen Ankertiefe und Kettenlänge zu reden — es ist einfach vorgegeben durch die Steigung b. Ob dieses Verhältnis nun 1:3 oder 1:8 ist, hängt schlicht davon ab, wieviel Haltekraft man dem Anker unter den gegebenen Verhältnissen zutraut, aber dies ist nicht Gegenstand dieses kleinen Artikels.

Diese ganzen Überlegungen kann man natürlich nun auch umdrehen und sich fragen: Bei gegebener Kettenlänge L_2 und Ankertiefe y_2, sowie bei gegebener Windkraft, also a, wie groß ist dann die Steigung b der am Anker angreifenden Kette?

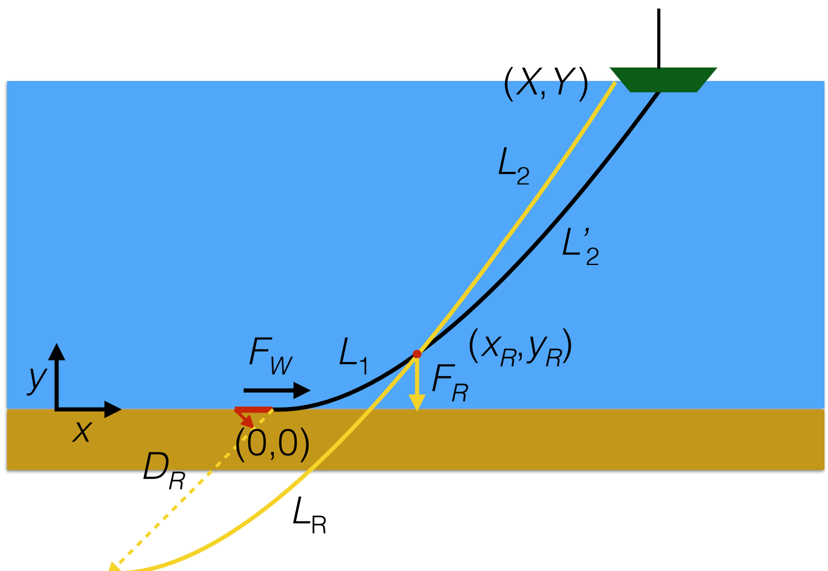

Fig. 12. Wenn ein Reitgewicht F_R am Punkt (x_R, y_R) befestigt wird, dann gibt dies einen Knick in der Kettenlinie. Genauer betrachtet zeigt sich, dass man den weiteren Kettenverlauf zur Wasseroberfläche einfach dadurch erhält, dass man eine Kopie der ursprünglichen Kettenlinie um den Vektor D_R so verschiebt, bis das Gewicht einer Kette der Länge $L_R - L_1$ dem Gewicht des Reitgewichts (im Wasser) entspricht: $F_R = m(L_R - L_1)$. Klarerweise ist $L_2 < L_2'$, und dies ist einer der positiven Effekte eines Reitgewichts.

6 Reitgewicht

Gelegentlich wird empfohlen, ein Reitgewicht an der Kette zu befestigen, um so die effektive Kettenlänge zu erhöhen — siehe Abb. 12. Der Effekt dieser Maßnahme ist im Rahmen unseres Modells sehr einfach zu beschreiben: Es wird an die Kette eine Punktlast angehängt, die einen Knick in der Kettenlinie bewirkt. Um die Größe dieses Knicks zu berechnen, muss man nur verstehen, dass an jedem Punkt entlang der Kette die nach unten wirkende Gewichtskraft dem Gewicht der Kette zwischen diesem Punkt und dem Anker entspricht (genauer dem Punkt, wo die Kette auf dem Untergrund aufkommt). Ein Reitgewicht F_R bewirkt also, dass dieser Kettenabschnitt virtuell um F_R/m Meter verlängert wird, wobei m das spezifische Gewicht der Kette pro laufendem Meter ist. Allerdings kann man nicht einfach sagen, dass die reale Kette also um diesen Betrag kürzer sein kann, da sich insgesamt die Form des Kettenverlaufs ändert — auch in Abhängigkeit davon, wo das Reitgewicht angebracht ist. Es ist am effektivsten dicht am Anker, aber so, dass es noch frei schwimmen kann. In diesem Fall erreicht man eine Reduktion der benötigten Kettenlänge um fast F_R/m Meter. Jedoch ist der Gewinn eher klein: Ein Reitgewicht von 10 kg im Wasser führt bei einer 10 mm Kette mit $m = 2\,\mathrm{kg/m}$ nur zu einer Verkürzung von etwas weniger als 5 m. Wenn Reitgewicht und Kette aus gleichem Material sind, kann man also aus Prinzip keine Gewichtsersparnis für das Boot erzielen, indem man Gewicht von der Kette zum Reitgewicht umallokiert. Dies funktioniert nur dann — und auch hier nur in begrenztem Maße — wenn das Reitgewicht aus einem Material mit deutlich höherem spezifischen Gewicht besteht, z.B. aus Blei. Andere, hiervon unberührte, Vorteile eines Reitgewichts sind die Reduktion des Schwoikreisradius, und dass man das Reitgewicht mehr im Zentrum des Bootes lagern kann und nicht am Bug.

Auch der Fall einer Kombination von Kette und Trosse, oder auch nur Kette im Wasser und Kette oberhalb der Wasseroberfläche lässt sich mit Hilfe der Kettenkurven berechnen. Hierzu muss man nur zwei solche Kettenkurven mit verschiedenen Parametern a_1 und a_2 miteinander geeignet verbinden. Da es keine Querkräfte gibt, muss die Verbindung dieser beiden Kurven “glatt” sein oder, mathematisch ausgedrückt, muss die Kettenkurve an dieser Stelle stetig differenzierbar sein.

7 Elastizität einer Kette

Wir definieren die Elastizität einer Kette als die Ableitung ihrer potentziellen Energie nach der Windkraft. Dies ist ein gutes Maß, um einschätzen zu können, wie leicht eine Kette zusätzliche Böen oder sonstige Energien, z.B. die eines Schwells, aufnehmen kann.

Die potentielle Energie einer Kette ist gegeben durch die Entfernung der einzelnen Kettenglieder vom Seegrund,[1] integriert entlang der Kette von Länge L:

$$E_{\mathrm{pot}}(L, Y, a) = mg \int_0^L dr Y(r, a). \tag{13}$$

Dies ist ein Linienintegral entlang der Kettenkurve, und wie vorher ist $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ die Gravitationsfeldstärke auf der Erdoberfläche.

Für eine Kette, welche genau waagerecht am Anker angreift, gilt nach Gl. (5) trivialerweise $Y(r, a) = \sqrt{r^2 + a^2} - a$. Nach Integration ergibt sich somit nach einigen Substitutionen

$$E_{\mathrm{pot}}(L, Y, a) = \frac{1}{2} mg \left(LY - a(L - X) \right) \tag{14}$$

[1] Für alle folgenden Berechnungen gehen wir von einem ebenen, vollkommen waagerechten Seeboden aus.

mit $X(L,a) = a\,\mathrm{asinh}(L/a)$. Der Nullpunkt der Energie liegt hier beim Anker.[2] Der erste Term in Eq. (14) ist die potenzielle Energie einer perfekt gerade gespannten Kette mit einem Gefälle von $L : Y$. Der zweite Term ist immer negativ und korrigiert damit diesen Wert nach unten, weil eine reale Kette immer etwas durchhängt. Mit $a = F/(mg)$, wobei F die Kraft am Anker ist, lässt sich dies auch umschreiben zu

$$E_{\mathrm{pot}}(L,Y,a) = mgLY/2 - F(L-X)/2. \tag{15}$$

Man kann den zweiten Term also interpretieren als eine Energie errechnet aus Ankerkraft F multipliziert mit der Hälfte der Differenz von Kettenlänge L und Schwoiradius X. Letzterer ist auch eng verbunden mit dem Winkel der Kette am Bug, $X(\alpha,a) = a\,\mathrm{asinh}(\tan(\alpha))$.

Es ist u.U. auch sinnvoll, von diesem Ergebnis die minimale potentielle Energie der Kette abzuziehen, wenn sie einfach senkrecht schlapp nach unten hängt,

$$E_{\mathrm{pot}}(Y,Y,0) = \frac{1}{2}mgY^2, \tag{16}$$

da diese Energie nie freigesetzt werden kann, solange sich die Ankertiefe Y nicht ändert. Damit ergibt sich

$$\tilde{E}_{\mathrm{pot}}(L,Y,a) = \frac{1}{2}mg\left((L-Y)Y - a(L-X)\right) \tag{17}$$

mit $a = \frac{1}{2}(L^2 - Y^2)/Y$, welches man wiederum als Lösung der quadaratischen Gleichung basierend auf Gl. (5) erhält. Damit folgt

$$\tilde{E}_{\mathrm{pot}}(L,Y,X(L,Y)) = \frac{1}{2}mg(L-Y)\left(Y - \frac{(L+Y)(L-X)}{2Y}\right). \tag{18}$$

Um es noch einmal zu betonen, diese Gleichung gilt für eine Kette der Länge L und einer Ankertiefe Y, sodass diese Kette beim Anker genau waagerecht angreift. Insbesondere, wenn eine Kette z.T. auf dem Seeboden liegt, geht in diese Formel nur der Teil der Kette ein, der sich vom Seeboden abhebt.

Die Tabellen 6 und 7 im Palstek Artikel von 05/2007, seinerzeit als numerische Integration "Arbeit ist gleich Kraft mal Weg" berechnet, geben genau diese potentielle Energie für zwei verschieden dicke Ketten an. Im Rahmen der Genauigkeit einer numerischen Integration liefert Gl. (17) die gleichen Werte wie in diesen Tabellen angegeben.

Klarerweise nimmt die potentielle Energie der Kette zu, wenn die Kette länger wird, aber auch größere Ankertiefen scheinen mehr potentielle Energie

[2] Wenn man statt dessen den Nullpunkt an die Wasseroberfläche zu verlegt, muss man hier einfach $mgLY$ abziehen, es dreht sich also genau das Vorzeichen des ersten Terms um. Allerdings ist hierbei zusätzlich zu beachten, dass jegliche Kette, die am Meeresboden liegt und momentan nicht gebraucht wird, bei der Berechnung der potentiellen Energie zu berücksichtigen ist. Bis auf eine additive Konstante ist deren potentielle Energie gegeben durch $mgLY$, und die beiden Effekte heben sich somit wieder auf.

zu erlauben. Um dies genauer zu ergründen, hier ein Gedankenexperiment: Wir halten die Kettenlänge L fest und wollen wissen, wie groß die potentielle Energie bei verschiedenen Ankertiefen Y ist. Im Extremfall, dass die Kette waagerecht am Strand liegt, ist die potentielle Energie Null. Das leuchtet intuitiv ein und wird auch von Gl. (17) mit $Y = 0$ und $X = L$ bestätigt. Andererseits, wenn die Kette senkrecht nach unten hängt, dann ist ihre potentielle Energie auch Null, da wir diesen Wert ja in Gl. (17) immer abgezogen hatten. Zwischen diesen beiden Extremen ist die potentielle Energie der Kette jedoch klarerweise größer Null. Es muss also irgendwo zwischen diesen beiden Extremfällen ein Maximum geben, bei dem die Kette bei gegebener Länge L eine maximale potentielle Energie speichern kann.

Um diesen Sachverhalt genauer zu studieren, betrachten wir die Elastizität der Kette. Diese ist definiert als Ableitung der potentiellen Energie nach Gl. (14) nach der Ankerlast F (wobei wie immer $F = mga$ gilt). Zunächst der einfachere Fall für konstante Ankertiefe Y,

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{\text{pot}}(L(a), Y, a)}{dF} &= a\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{\sqrt{Y(Y+2a)}}{a}\right) - \frac{2Y}{\sqrt{Y(Y+2a)}}\right) \\
&= a\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{L}{a}\right) - 2\frac{Y}{L}\right) = X - 2aY/L \qquad (19) \\
&= Yt\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{\sqrt{1+2t}}{t}\right) - \frac{2}{\sqrt{1+2t}}\right) \qquad (20) \\
&= \frac{L^2 - Y^2}{2Y}\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{2YL}{L^2 - Y^2}\right) - 2\frac{Y}{L}\right) \\
&= Y\frac{s^2 - 1}{2}\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{2s}{s^2 - 1}\right) - \frac{2}{s}\right) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

wobei wir $s = L/Y$ und $t = a/Y = F/(mgY)$ verwendet haben.[3] Um das Maximum der Kettenelastizität zu finden, müssen wir ein zweites Mal differenzieren und das Ergebnis gleich Null setzen. Dies tun wir einmal bei konstantem Y, und einmal bei konstantem L,

$$
\frac{d^2 E_{\text{pot}}(F, s, Y)}{dF\,ds} = 0 \qquad (22)
$$

woraus wir als optimalen Wert $s = 1.395670925796908$ erhalten.

Es macht auch Sinn, den zweiten Fall zu betrachten, bei dem beim Differenzieren nach F nicht Y sondern L konstant gehalten wird. Allerdings bedeutet dies, dass bei konstanter Kettenlänge L die ganze Kurve differenziell etwas flacher wird und somit Energie verliert. Dies kommt daher, dass wir in Gl. (14) als Referenz den Meeresboden gesetzt hatten. Sinnvoller ist es hier

[3] Das gleiche Ergebnis erhalten wir natürlich auch, wenn wir die potentielle Energie als Integral schreiben und dann mit der Leibnitz Regel unter dem Integral und an den Integralgrenzen nach F differenzieren.

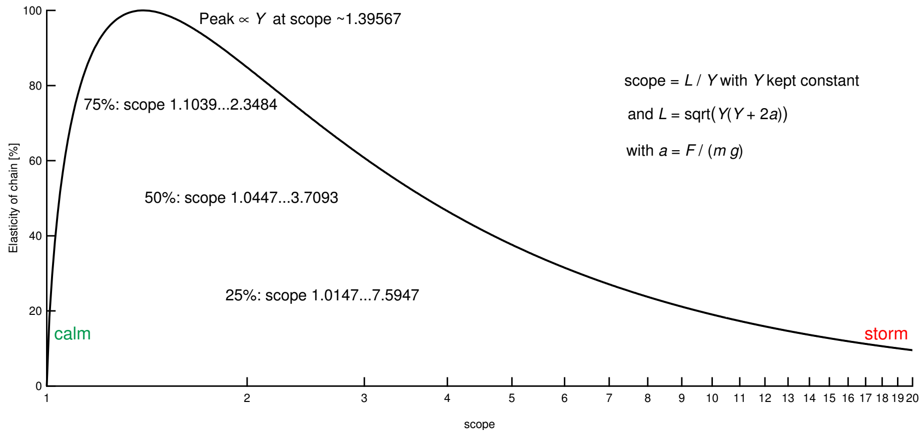

Fig. 13. Elastizität einer Kette, welche immer waagerecht am Anker angreift, als Funktion des Verhältnis L/Y, bei konstanter Ankertiefe Y. Nach rechts hin wird damit die Last am Anker immer größer. Weder eine im wesentlichen senkrecht verlaufende Kette ($L/Y \ll 1$), noch eine fast horizontal verlaufende Kette ($L/Y \gg 1$) haben eine gute Elastizität. Es gibt ein Optimum an Elastizität bei $L/Y = 1.39567$. Große Werte von L/Y erreicht man in der Regel bei Sturm in flachem Wasser. Dieser Graph ist auf 100% normiert — das Maximum skaliert mit Y.

meistens, als Bezugspunkt die Wasseroberfläche zu nehmen, indem wir einfach $mgLY$ als Energie hinzuaddieren. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{dE_{\mathrm{pot}}(L,Y(a),a)}{dF} + mgL\frac{dY(a)}{dF} &= a\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{L}{a}\right) - \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\right) \\ &= L\frac{s^2-1}{2s}\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{2s}{s^2-1}\right) - \frac{2s}{s^2+1}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

Das Maximum ergibt sich wieder aus

$$\frac{d^2E_{\mathrm{pot}}(F,s,L)}{dFds} + mgL\frac{d^2Y(a)}{dFds} = 0, \tag{24}$$

woraus wir als optimalen Wert $s = 1.39950539086604$ erhalten.

In den Fig. 13 und 14 ist die Kettenelastizität als Funktion des Verhältnis $s = L/Y$ (im Englischen scope genannt) aufgetragen — einmal unter Festhalten von Y, also Gl. (21), und einmal unter Festhalten von L, also Gl. (23). Wir haben hier als Parameter den scope $s = L/Y$ gewählt, da dieser für diese Betrachtung die universelle Größe ist. Zudem ist er leicht empirisch festzustellen und alle Segler haben damit Erfahrung. Aber im Grunde genommen ist die X–Achse nur eine unterschiedlich parametrisierte Funktion des Parameters a, also letztendlich der Last F am Anker. Rechts ist Sturm, links ist Flaute. In beiden Graphen sieht man ein Maximum, bei dem die Elastizität der Kette optimal ist. Es mag zunächst irritieren, dass dieses Maximum in beiden Graphen leicht unterschiedlich ist, aber

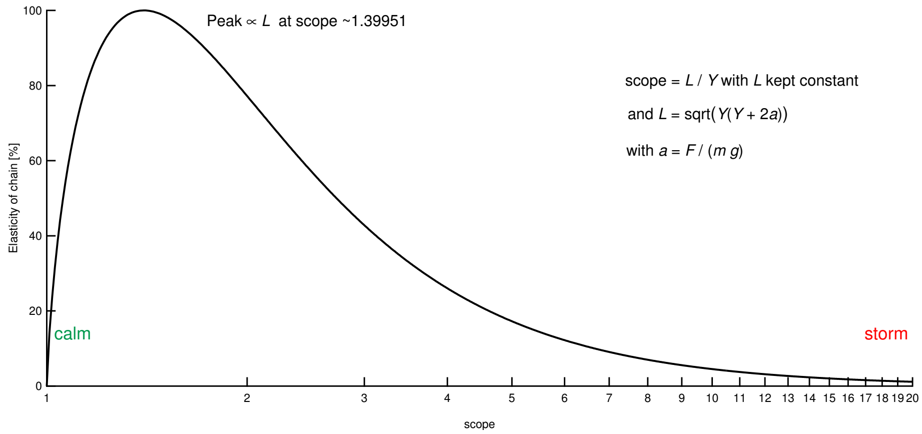

Fig. 14. Ebenfalls die Elastizität einer Kette, welche immer waagerecht am Anker angreift, als Funktion des Verhältnis L/Y, aber nun bei konstanter Kettenlänge L. Das Maximum ist hier leicht verschoben gegenüber Fig. 13, da nun L statt Y konstant gehalten wird. Dieser Graph ist auf 100% normiert — das Maximum skaliert mit L.

dies hängt mit den unterschiedlichen Randbedingungen an Y bzw. L zusammen. Für $L/Y \ll 1$ und $L/Y \gg 1$ ist die Elastizität der Kette schlecht. Im ersteren Fall hängt die Kette fast senkrecht vom Bug hinunter, im zweiten Fall ist sie sehr flach und geht fast horizontal vom Bug weg. Der erste Fall ist eventuell nicht schlimm, es ist vielleicht nur Flaute. Aber der zweite Fall ist potenziell gefährlich, da dieser typischerweise bei Sturm im flachen Wasser auftritt. Um die Situation zu verbessern kann man versuchen, in tieferes Wasser auszuweichen und mehr Kette zu stecken. Man bewegt sich dann auf der rechten Seite des Maximums auf dasselbe zu. Dies hat zwei positive Effekte — zum einen wird die Elastiziät besser als Prozentsatz des Maximums, zum anderen wird das Maximum selbst größer, da dieses mit Y bzw. L skaliert. Hier ist also schon ein erster Hinweis darauf zu finden, dass die beste Sturmtaktik nicht unbedingt darin besteht, in möglichst flaches Wasser zu flüchten. Die Kette funktioniert dort schlecht, sie kann kaum Energie aufnehmen, auch wenn sie sehr lang ist. Dies kann man durch Kettenstropps und Hahnepots z.T. wieder wett machen, aber man muss sich über diese prinzipielle Eigenschaft der Kette bewusst sein. Das Ausweichen in tieferes Wasser macht natürlich nur dann Sinn, wenn es dort nicht viel mehr Schwell oder Wind gibt.

Um ein konkretes Beispiel zu geben, wie man Fig. 13 lesen sollte: Ich liege vor Anker in flachem Wasser auf einer Tiefe Y. Momentan gibt es nur eine schwache Brise, aber da Sturm aufkommen soll, habe ich schon vorsorglich sehr viel Kette gesteckt, die natürlich nun zum großen Teil erst einnmal auf dem Meeresboden liegt. Der scope, also das Verhältnis von Kettenlänge zu Wassertiefe, ist recht klein, wenn man nur die Kette betrachtet, die schon vom Meeresboden abgehoben ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, wir sind bei der leichten Brise

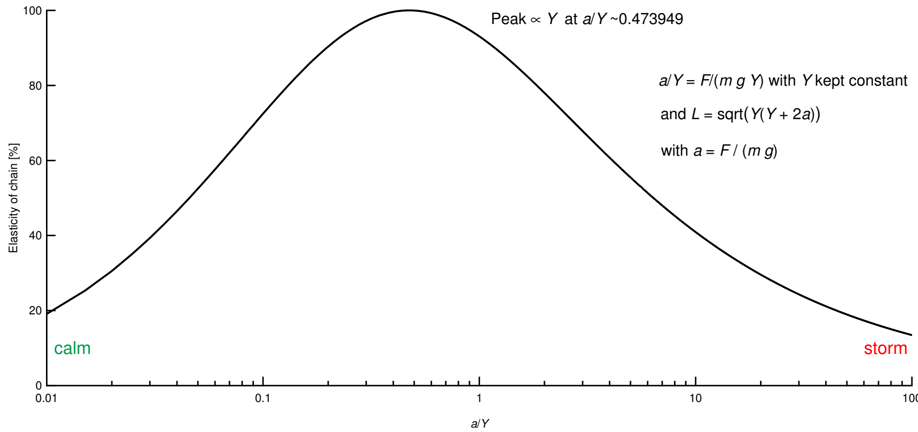

Fig. 15. Der gleiche Graph wie in Fig. 13, aber nun aufgetragen als Funktion des Parameters $t = a/Y = F/(mgY)$. Dieser Graph ist auf 100% normiert — das Maximum skaliert mit Y.

im Optimum, also bei einem scope von 1.4 — die Kette hängt fast senkrecht runter. Nun legt der Wind zu und es wird immer mehr Kette vom Boden abgehoben. Der effektive scope nimmt also zu — wir bewegen uns vom Maximum in Fig. 13 nach rechts. Wenn ein scope von 3.7 erreicht ist, hat die Elastizität der Kette auf 50% abgenommen, verglichen mit dem maximalen Wert. Und dies, obwohl nun ein deutlich größerer Teil der Kette vom Meeresgrund abgehoben ist! Wenn ein scope von 20 erreicht ist, ist die Elastizität der Kette sogar auf 9.5% abgesunken. Sie ist also nicht mehr sehr effektiv und zu steif, um Windstöße und Schwells geschmeidig aufzufangen. Kettenstrobbs oder Hahnepots sind nun extrem wichtig.

Wenn wir diese Analyse nun wiederholen, aber uns vorher auf eine Ankertiefe von $2Y$ verholen, also das Doppelte, dann stellen wir fest, dass wir uns bei der leichten Brise bei einem scope von 1.22 befinden. Dies kann man leicht ausrechnen, wenn man berücksichtigt, dass der scope $L/Y = \sqrt{(Y + 2a)/Y}$ beträgt und der Parameter a unverändert bleibt. Im Sturm finden wir uns nun bei einem scope von 14.2 wieder, statt 20. Dies sind 13.5% in Fig. 13, was schon einmal besser ist als vorher. Es kommt aber noch besser! Bei doppelter Ankertiefe ist das Maximum in Fig. 13 in absoluten Zahlen auch doppelt so groß. Daher ist die Elastizität nun 27% des alten Maximums bei der ursprünglichen Ankertiefe Y. Das ist das dreifache an Elastiziät. Um dies zu erreichen, mussten wir die Kettenlänge nur um 41.6% verlängern. Wenn wir diese Rechnung wiederholen mit einer dreifachen Ankertiefe, $3Y$, dann ist der finale scope auf 11.6 gesunken, und die Elastizität auf 49.4% gestiegen, also um einen Faktor 5. Dabei mussten wir 73.6% mehr Kette einsetzen.

Es macht also sehr viel Sinn, in tiefere Wasser zum Ankern auszuweichen, um die Elastizität der Kette zu erhöhen — vorausgesetzt, man hat genügend Kette, und der neue Ankerplatz ist nicht sehr viel mehr Wind und Schwell ausgesetzt. als der alte.

Wenn wir den Graphen aus Fig. 13 nicht als Funktion des scopes L/Y parametrisieren, sondern als Funktion von $t = a/Y = F/(mgY)$, wie in Fig. 15 geschehen, dann wird klar, dass es unter dem Gesichtspunkt einer möglichst großen Elastizität der Kette besser ist, dünnere Ketten zu verwenden: Wenn ich das laufende Gewicht der Kette halbiere, $m \to m/2$, und dann eine doppelt so lange Kette verwende, $L \to 2L$, mit der ich auf doppelter Wassertiefe ankere, $Y \to 2Y$, dann erhalte ich exakt den gleichen Wert von t. Aber da der Graph mit der Ankertiefe Y skaliert, hat sich nun die Elastizität der Kette verdoppelt! Das Gesamtgewicht der Kette ist jedoch konstant geblieben. Dies läßt sich auch einfach aus der ursprünglichen Gl. (14) für die potentielle Energie ablesen: Wenn ich hier die laufende Masse pro Meter der Kette halbiere und L und Y verdoppel, dann verdoppelt sich auch die potenzielle Energie der Kette.

Zum Abschluss möchte ich hier noch einen besonders einfachen zweiten Zugang zu dieser Thematik vorstellen: Nehmen wir als Anfangspunkt an, dass überhaupt kein Wind weht und kein Schwell vorhanden ist. Die Kette hängt dann senkrecht nach unten und besitzt eine potentielle Energie von $mg/2Y^2$ — einfach gesamtes Kettengewicht auf halber Höhe. Nun kommt die Kette steif, sei es durch eine besonders starke Böe, oder einen extremen Schwell. Auch wenn es in der Realität nicht passieren kann, nehmen wir als Extremfall an, dass die Kette vollkommen gespannt ist und eine perfekte Gerade zwischen Bugroller und Anker bildet. Dann ist ihre potentielle Energie gegeben durch $mg/2YL$, wobei L die zur Verfügung stehende feste Länge der Ankerkette ist. Die Differenz dieser beiden Energien ist, was die Kette an Energie maximal absorbieren kann: $mg/2Y(L-Y)$. Wenn ich nun die Kettenlänge L fest halte und nach der Wassertiefe Y differenziere, erhalte ich ein Maximum dieser Energiedifferenz bei $L = 2Y$. Mit anderen Worten, bei einem Scope von $L/Y = 2$ kann die Kette am meisten Energie absorbieren. Dieser Wert ist leicht anders als die vorhergehenden, aber das hängt mit den anderen Randbedingungen zusammen (L oder Y festhalten beim Differenzieren und anderer Winkel am Anker). Im entscheidenen Punkt liefert aber auch diese einfache Rechnung die gleiche Vorhersage, dass eine Kette nicht gut darin ist, Energie aufzunehmen, wenn sie sehr flach gespannt ist, sprich im flachen Wasser. Interessanterweise ist das Maximum proportional zu Y^2 und nicht zu Y, wie die Elastizitätskurven oben, aber es handelt sich hier auch um zwei verschiedene Größen. Das eine ist die absolute Energiedifferenz, das andere die Elastizität. Einen weiteren Punkt gibt es hier noch zu beachten. In diesem letzten Model lassen wir zu, dass die Kette mit einem Winkel am Anker zieht und somit wirklich sehr steif geht, was zum einen auf Kosten der maximalen Haltekraft des Ankers geht aber — noch wichtiger — nur erreicht wird, wenn die vom Bug an den Anker durchgereichte Last extrem groß wird und damit sehr wahrscheinlich den Anker ausreisst. In den Beispielen vorher zog die Kette unter allen Umständen immer noch waagerecht am Anker.

8 Dynamisches Ankern

Bisher sind wir immer vom statischen Ankern ausgegangen, also dem Fall, dass Wind und Schiff / Kette sich in einem Gleichgewicht befinden. Jeder, der schon einmal geankert hat, weiß aber, dass dies nur eine Idealisierung ist. Vorbeifahrende dicke Containerschiffe können einen heftigen Wellenschlag verursachen, oder ein alter Sturm macht sich noch durch eine starke Dünung bemerkbar. Angeregt durch einen Gedankenaustausch mit dem Autor des Artikels in Palstek 05/2007, Harald Melwisch, soll im Folgenden das dynamische Ankern analysiert werden, bei dem diese Effekte in einem einfachen Model mit berücksichtigt werden.

Ein Welle bewirkt, dass das Schiff sich etwas in Bewegung setzt und somit eine kinetische Energie erhält,

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(v_\parallel^2 + v_\perp^2), \tag{25}$$

wobei M die Masse des Schiffes und v dessen Geschwindigkeit ist, aufgeteilt in deren Komponenten entlang der Kette, $v_\parallel$, und quer dazu, $v_\perp$. Für die belastende Wirkung auf die Kette ist nur $v_\parallel$ relevant — und dies auch nur in dem Fall, wenn sich das Schiff vom Anker weg bewegt.[4] Typische Geschwindigkeiten werden selten über $1 - 2\,m/s$ hinausgehen. Diese kinetische Energie muss von der Kette absorbiert werden, also letztendlich vorübergehend in potentielle Energie der Kette umgewandelt werden.

Wenden wir uns nun also dem kombinierten Fall zu, dass wir einerseits eine Windlast annehmen und dann wissen wollen, wie viel Meter Kette ΔL mehr gesteckt werden müssen, damit sie zusätzlich eine vorgegebene kinetische Energie E_{kin} noch vollkommen absorbieren kann, ohne am Anker in einem Winkel abzuheben.

Zunächst ist dabei festzustellen, dass es einen Konkurrenten zur kinetischen Energie gibt, wenn es um das "Aufladen" der potentiellen Energie der Kette geht. Wenn das Boot sich weiter vom Anker weg bewegt, dann bewegt es sich damit auch im Kraftfeld des Windes, und gemäß Arbeit ist gleich Kraft mal Weg, ist dies ein Energiebeitrag, der auch berücksichtigt werden muss. Diese Energie wird freigesetzt, wenn sich das Boot in Windrichtung bewegt, und wird "unbemerkt" vollkommen in potentielle Energie der Kette verwandelt. Solange nur der Wind am Boot zerrt, geht der Energiegewinn im Windfeld damit zu 100% in die potentielle Energie der Kette, bis ein Gleichgewicht erreicht ist. Energieerhaltung verlangt also

$$E_{\mathrm{pot}} - (X - L)F + E_{\mathrm{kin}} = \text{constant}. \tag{26}$$

[4] Wenn man mit ablandigem Wind ankert, wird Schwell in der Regel auf das Heck treffen und nur indirekt über den Rücksog einen Effekt haben — wobei vorher auch noch die Kette gerade entlastet worden war und damit mehr potentielle Energie aufnehmen kann. Dynamisches Ankern ist also in der Regel wichtiger bei auflandigem Wind.

Hierbei haben wir als Position des Boots $X - L$ verwendet und nicht den Schwoiradius X, da wir berücksichtigen müssen, dass der Bezugspunkt des Schwoiradius der Punkt ist, an dem sich die Kette von Boden abhebt, und dieser ist nicht fix. Die Position des Schiffes wird also durch $X - L$ beschrieben — zuzüglich einer Konstanten.

Man kann das Zusammenspiel dieser verschiedenen Komponenten sehr gut an der Ableitung der potentiellen Energie nach der Kettenlänge L,

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{dL} = F\left(\frac{L}{Y}\operatorname{asinh}\left(\frac{L}{a}\right) - 2\right) = F\left(\frac{LX}{aY} - 2\right), \tag{27}$$

und der Ableitung der Position des Bootes nach L sehen,

$$\frac{d(X-L)}{dL} = \frac{L}{Y}\operatorname{asinh}\left(\frac{L}{a}\right) - 2. \tag{28}$$

Vergleicht man Gl. (27) und Gl. (28) miteinander, so stellt man fest, dass $dE_{\text{pot}}/dL = Fd(X-L)/dL$ gilt. Dies heisst nichts anderes, als dass die im Wind gewonnene Energie zu 100% in die potentielle Energie der Kette fließt und diese damit vollkommen "abfüllt".

Nehmen wir nun an, ein Gleichgewicht sei erreicht bei einer Windstärke F bei dem das Boot zur Ruhe gekommen ist, und das Boot erhält nun eine zusätzliche kinetische Energie E_{kin}, mit der es sich weiter vom Anker entfernt und somit noch mehr Kette vom Boden hebt, bis auch diese kinetische Energie verbraucht ist und das Boot wieder (kurzzeitig) zum Stillstand kommt. In diesem Fall bleibt also die Windstärke F konstant, und da die ersten Ableitungen sich aufheben, muss diese kinetische Energie näherungsweise in der zweiten Ableitung absorbiert werden,

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_{\text{pot}}}{d^2L} - F\frac{d^2(X-L)}{d^2L}\right)\Delta L^2. \tag{29}$$

Hierbei ist ΔL die zusätzlich zu steckende Kettenlänge, um die kinetische Energie zu absorbieren. Für $Y^4 \ll L^4$ erhalten wir in erster Näherung der Taylorentwicklung

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{mgY}{3L_{\text{static}}}\left(1 + \frac{3Y}{5(Y+2a)}\right)\Delta L^2, \tag{30}$$

wobei $L_{\text{static}} = \sqrt{Y(Y+2a)}$ die Kettenlänge im statischen Fall ist. Aufgelöst nach ΔL ergibt sich

$$\Delta L \approx \sqrt{\frac{3L_{\text{static}}E_{\text{kin}}}{mgY\left(1 + \frac{3Y}{5(Y+2a)}\right)}}. \tag{31}$$

Man sieht also, dass ΔL für kleine Ankertiefen Y wie $Y^{-\frac{1}{2}}$ divergiert.[5] Der Grund ist einfach der, dass eine kurze Kette nicht genügend Energie absorbieren kann

[5] Das gleiche gilt auch für das Gewicht m der Kette. Je leichter die Kette im Wasser ist, desto weniger potentielle Energie kann sie aufnehmen pro laufendem Meter, und ΔL divergiert auch hier.

und unter Last sofort vollkommen straff gespannt ist. Wenn man die Näherung Gl. (31) mit dem numerisch exakten Ergebnis vergleicht, so findet man, dass ab einer Windstärke von ca 4 BFT die Näherung bis auf wenige % genau ist.

Gl. (31) ist für einen waagerechten Seeboden hergeleitet worden, sodass die Kette genau auf der Ankertiefe liegt, wenn sie nicht gerade voll ausgelastet wird. Wenn man auf abschüssigem Grund ankert, und das Schiff liegt auf einer größeren Tiefe als der Anker, kann die Kette mehr kinetische Energie aufnehmen und ΔL wird entsprechend kleiner als von Gl. (31) berechnet. Allerdings muss hier die Kette auch der Neigung des Seebodens entsprechend am Anker angreifen, wodurch sich die aus dem statischen Ankern berechnete Kettenlänge wieder vergrößert. Umgekehrt, wenn das Schiff auf weniger Tiefe liegen sollte als der Anker, wird ΔL vergrößert werden müssen, aber man muss weniger in die Kettenlänge des statischen Ankerns investieren. Vor diesem Hintergrund an Unsicherheiten ist es sinnlos, ΔL noch genauer als Gl. (31) berechnen zu wollen.

Damit können wir nun statisches und dynamisches Ankern zusammen betrachten. Zunächst berechnet man mit Gl. (4) für eine gegebene Ankertiefe Y die minimal benötigte Kettenlänge $L_{\text{static}} = \sqrt{Y(Y+2a)}$ des statischen Ankerns. Hier sollte die Windstärke nach den zu erwartenden Böen bemessen werden und nicht nur nach dem Grundwind.[6] Auch eine starke Strömung wäre über diese Gleichung mittels eines Kräfteparallelograms zu berücksichtigen. In einem zweiten Schritt wird die durch Schwell oder sonstige Wellen in das Schiff eingebrachte kinetische Energie ΔE mittels Gl. (25) abgeschätzt. Anhaltspunkte für diese Schätzung können Werte sein, die man auf der Logge beim Schaukeln in einer großen Welle abliest. Mit diesem Wert beschickt man schliesslich Gl. (31) und erhält damit die Länge ΔL der zusätzlich zu steckenden Kette, welche man braucht, um nicht nur den Wind, sondern auch den Schwell und die Welle abfangen zu können.

Also, zusammen genommen ist

$$\tilde{L} \approx L_{\text{static}} + \sqrt{\frac{3 L_{\text{static}} E_{\text{kin}}}{mgY\left(1 + \frac{3Y}{5(Y+2a)}\right)}}. \tag{32}$$

In Abb. 16 und 17 haben wir für eine 10 mm Kette die benötigte Kettenlänge $\tilde{L}$ als Funktion der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken und

[6] Man muß sich klar machen, dass es beim statischen Ankern nicht notwendig ist, eine möglichst große potentielle Energie in der Kette zu haben. Bei geringeren Ankertiefen nimmt die potentielle Energie der Kette zwar ab, aber es wird auch nicht so viel davon gebraucht, um dem Wind gegenzuhalten. Beim statischem Ankern ist die potentielle Energie deshalb überhaupt nicht relevant, es zählt nur die letztendlich am Anker angreifende Windkraft. Hierzu zählt insbesondere auch die Kraft einer Böe. Ein an Land stehendes Schiff wird in einer Böe nur eine Kraft erfahren, aber solange es nicht umkippt, keinen Energieeintrag. Eine Böe als Energieeintrag zu behandeln wäre zwar im Prinzip möglich, aber ungünstig, da der Energieeintrag einer Böe wie im Beispiel gezeigt von den Parametern L und Y abhängt, und somit kein unabhängiger Parameter ist.

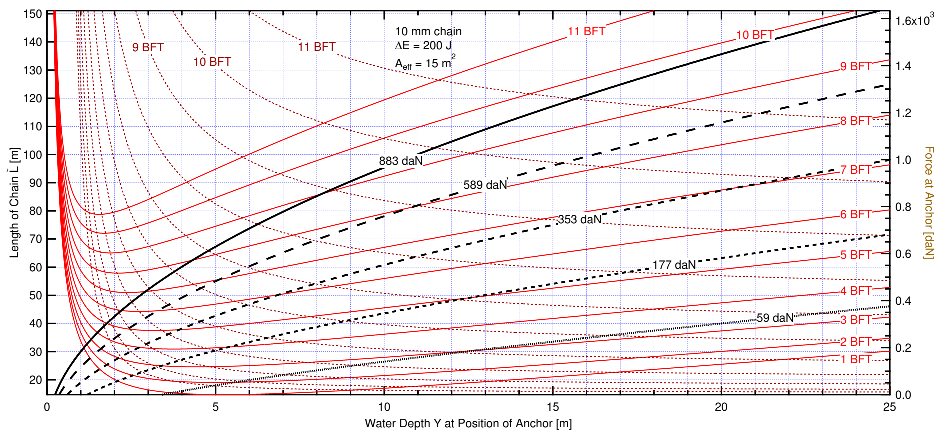

Fig. 16. Dynamisches Ankern für $\varDelta E = 200\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 15\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

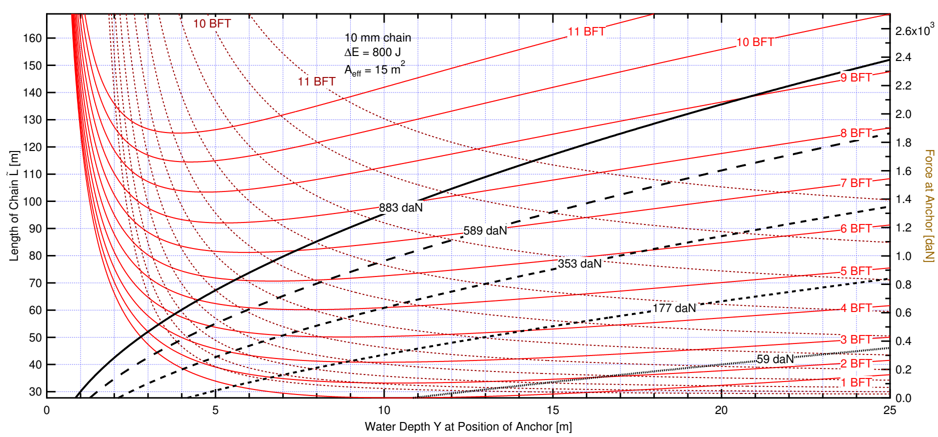

Fig. 17. Dynamisches Ankern für $\varDelta E = 800\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 15\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

Energieeinträgen $\varDelta E$ aufgetragen. Durchgezogene rote Linien sind im Rahmen des Models numerisch exakt gerechnet. Etwas Augenmerk muss hier allerdings auf die am Anker wirkende horizontale Kraft

$$F_A = mg\tilde{a} = mg\frac{\tilde{L}^2 - Y^2}{2Y} \tag{33}$$

gelegt werden, da diese auch von dem Energieeintrag $\varDelta E$ beeinflusst wird und schnell den Anker überfordern kann. Auch aus diesem Grund kann es also sein, dass man zu flaches Wasser sogar verlassen muss. Wenn man — vielleicht durch einen Ankertest — eine Vorstellung hat, welch maximale Haltekraft der Anker entwickeln kann, dann ist es sinnvoll, Gl. (33) nach der Kraft umzustellen zu

$$\tilde{L}_{\max} = \sqrt{Y\left(Y + \frac{2F_{A\max}}{mg}\right)}. \tag{34}$$

Dies gibt für jede Ankertiefe Y an, wie lang die Kette $\tilde{L}$ nach Gl. (32) maximal sein darf, um die maximale vorgegebene / angenommene Haltekraft des Ankers nicht zu überschreiten.[7] In den Abb. 16 bis 23 haben wir willkürlich für 8 mm Ketten $F_{A\max} = 539\,\mathrm{daN}$, für 10 mm Ketten $F_{A\max} = 883\,\mathrm{daN}$, und für 12 mm Ketten $F_{A\max} = 1245\,\mathrm{daN}$ angenommen und als schwarze Kurve mit eingezeichnet. Alles oberhalb dieser Kurven ist tabu, da es den Anker per Annahme überfordert.

Die am Bug an der Kette wirkende Kraft ergibt sich nach Pythagoras aus der Kraft am Anker und dem Gewicht der (frei hängenden) Kette als

$$F_{\mathrm{Bug}} = mg\sqrt{\tilde{L}^2 + \tilde{a}^2} = mg\frac{\tilde{L}^2 + Y^2}{2Y} = F_A + mgY. \tag{35}$$

Die Kraft am Bug ist also einfach die Summe der Kraft am Anker und der Gewichtskraft einer imaginären am Ort des Ankers senkrecht im Wasser hängenden Kette gleicher Bauart.

Eine 10 mm (8 mm) Duplex Edelstahlkette hat eine Bruchlast von 10000 kp (6300 kp). Hier wird also eher der Anker ausreissen, oder ein Schäkel kaputt gehen, als dass die Kette reisst. Für eine verzinkte Eisenkette liegen diese Werte bei 3400 kp bzw. 2500 kp. Von diesen Werten sollte jedoch nur ca 20 - 30% als Last angesetzt werden.

Wieviel Last am Anker anliegen kann, bevor er ausbricht, hängt klarerweise vom Ankertyp und dem Untergrund ab. Informationen hierzu können in verschiedenen Vergleichstests von Ankern gefunden werden. Gute (und genügend große) Anker können bei geeignetem Untergrund sicherlich deutlich über eine Tonne an Last aufnehmen.

Der große qualitative Unterschied zum rein statischen Ankern wird für kleine Ankertiefen Y sichtbar. Hier divergiert die benötigte Kettenlänge. Wie oben erwähnt ist der Grund einfach: Eine kurze oder zwar lang aber nur flach verlaufende Kette kann nur wenig potentielle Energie aufnehmen und wird so selbst bei kleinen Einträgen von kinetischer Energie schnell überfordert. Das Optimum einer möglichst kurzen Kette wird daher bei einer *endlichen* Ankertiefe erreicht und nicht bei einer *möglichst kleinen* Ankertiefe, wie das rein statische Ankern suggerieren würde. Aus dem gleichen Grund divergiert auch die am Anker angreifende Kraft F_A für kleine Ankertiefen Y, und es kann daher sogar sein, dass man die "optimale" Ankertiefe gar nicht erreichen kann, weil der Anker oder

[7] Um hier einem möglichen Missverständnis vorzubeugen: Der in Gl. (32) errechnete *notwendige* Wert von $\tilde{L}$ darf Gl. (34) nicht überschreiten. Davon unbenommen kann ich natürlich mehr Kette stecken, die dann halt am Seegrund liegt und vielleicht bei Flut gebraucht wird.

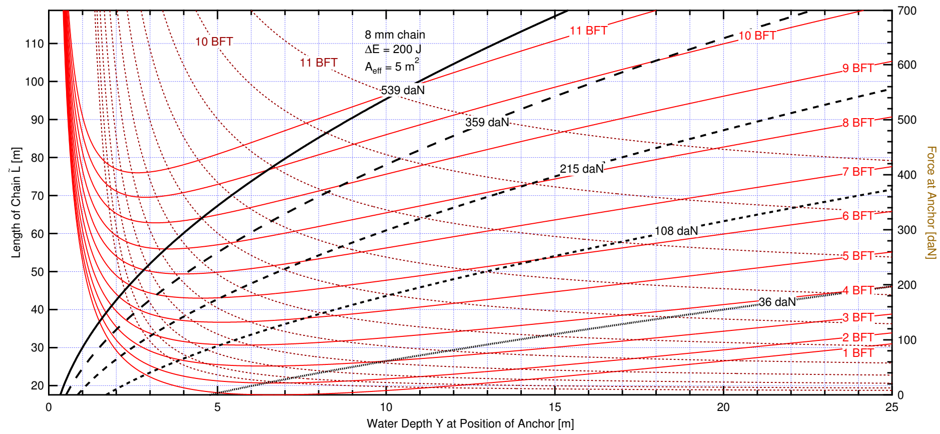

Fig. 18. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 200\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 5\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1.22\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

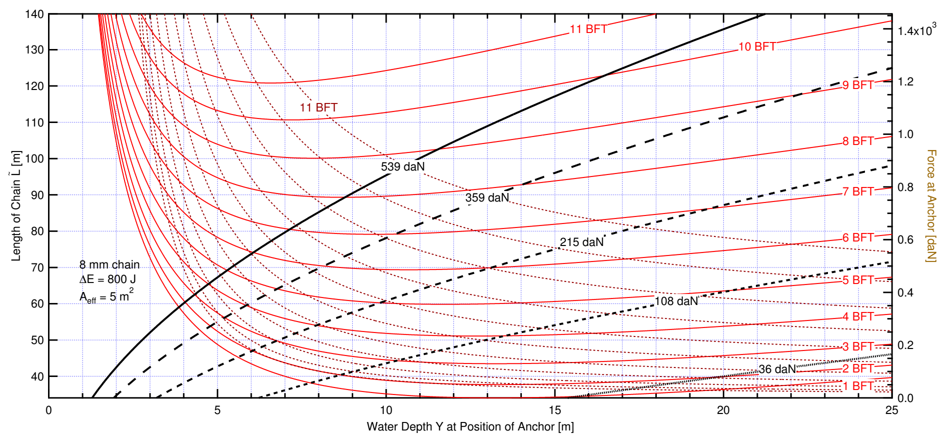

Fig. 19. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 800\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 5\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1.22\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

die Kette nicht mehr mitspielt, und sich dieses Optimum damit jenseits der schwarzen Kurve befindet. Wie aus den verschiedenen Diagrammen ersichtlich ist, ist im Bereich der optimalen Wassertiefe mit der kürzesten Kette die Kraft am Anker schon deutlich höher als im statischen Fall und “kurz” vor dem Divergieren. Dies ist eine sehr wichtige Erkenntnis für das sichere Ankern.

Allerdings ist auch klar, dass es auf die Richtung des Energieeintrags relativ zur Ausrichtung des Schiffs entlang der Kette ankommt. Was wir hier immer betrachtet haben sind Energieeinträge “auf die Nase”. Energieeinträge von der Seite führen nur zu einem Schwingen des Schiffes um den Anker als Drehpunkt.

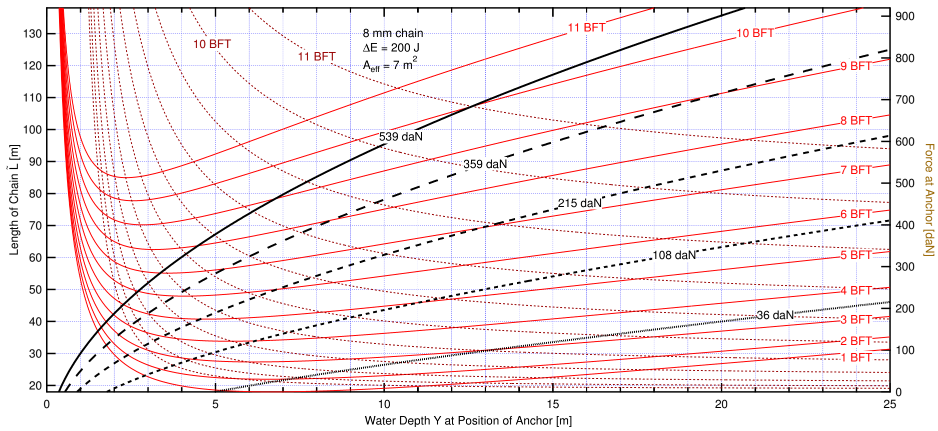

Fig. 20. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 200\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 7\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1.22\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

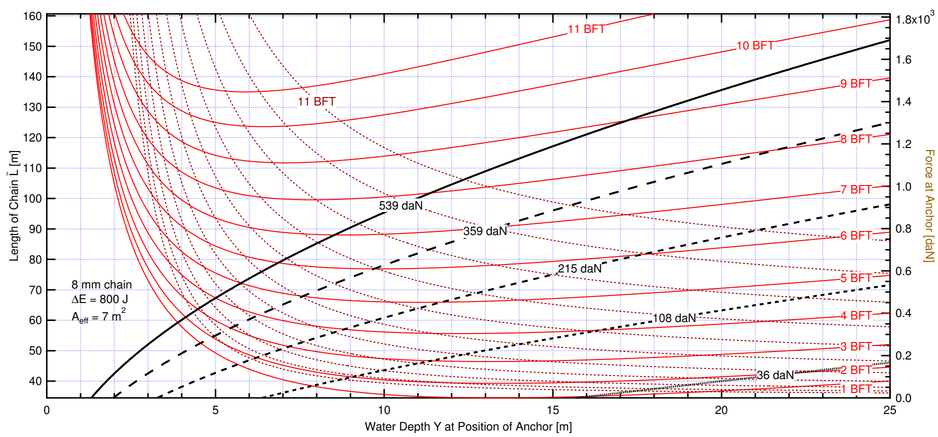

Fig. 21. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 800\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 7\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1.22\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

Hier entsteht die Wirkung nur indirekt, indem das Schiff dem Wind temporär eine größere Angriffsfläche bietet. Und schliesslich, wenn der Energieeintrag von achtern erfolgt, ist das erst einmal gar nicht tragisch für die Kette, da sie temporär entlastet wird. Erst der Rücksog wird dann relevant werden, aber da sich die Kette vorher gerade entspannt hatte, sollte dieser Effekt auch nicht dramatisch sein. Aus diesen Überlegungen heraus wird man also in der Regel Energieeinträge durch Schwell nur dann berücksichtigen müssen, wenn man mit auflandigem Wind ankern muss.

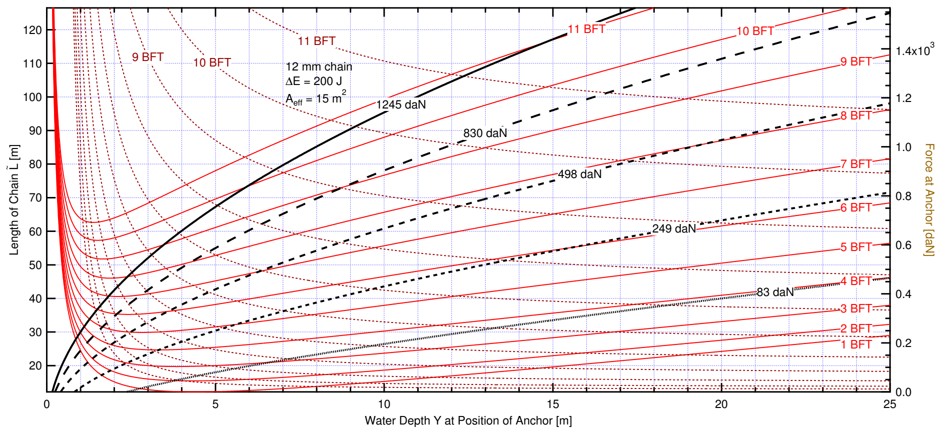

Fig. 22. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 200\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 12 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 15\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2.82\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

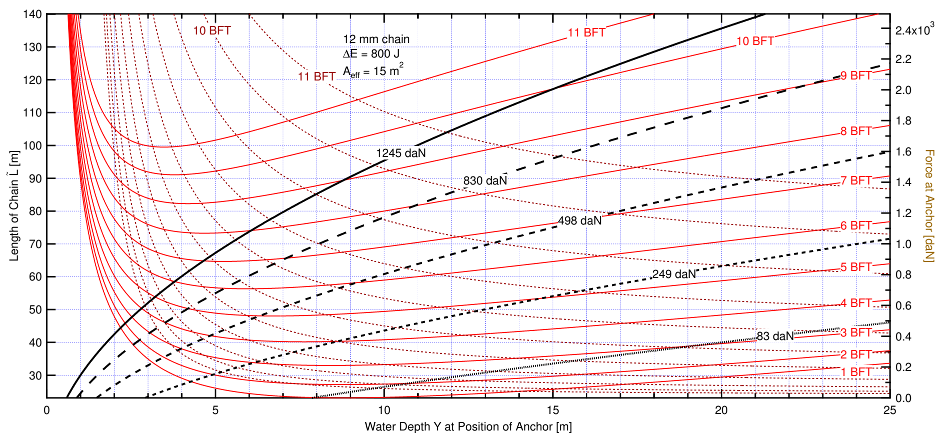

Fig. 23. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 800\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 12 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 15\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2.82\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

Klarerweise schadet es nie, mehr als die minimal benötigte Kettenlänge zu stecken, egal auf welcher Ankertiefe man ankert. Mathematisch wird dies dadurch ausgedrückt, dass die Ableitung von Gl. (18) nach L immer positiv ist. Allerdings bringt dies nur etwas, um noch mehr Windkraft und / oder kinetische Energie abzufedern. Es ist nicht möglich, damit bei gegebener Ankertiefe die Kraft am Anker zu reduzieren. Diese wird nach $F_A = mg(\tilde{L}^2 - Y^2)/(2Y)$ einzig und allein durch die Ankertiefe Y und die Länge $\tilde{L}$ der frei hängenden Kette bestimmt. Ein Verlängern der Kette bewirkt hier nur, dass entsprechend mehr Kette am Seeboden liegt, was aber keinen Einfluss auf $\tilde{L}$ hat. Wenn eine Reduzierung der

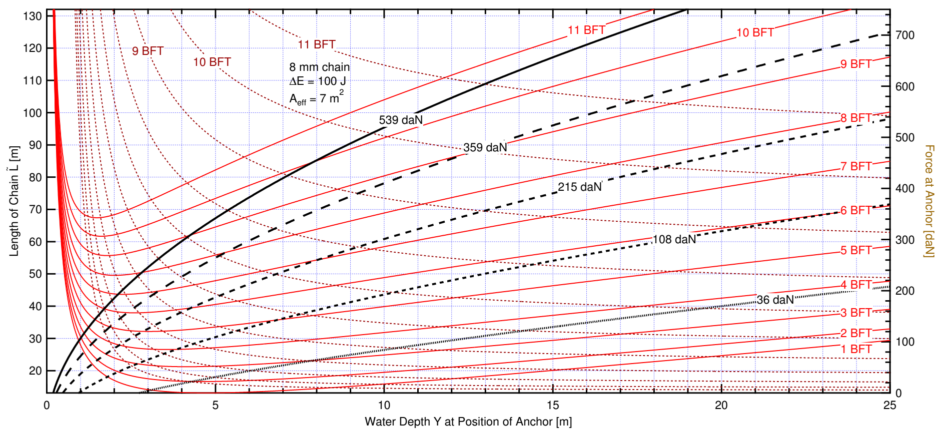

Fig. 24. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 100\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 8 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 7\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 1,22\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

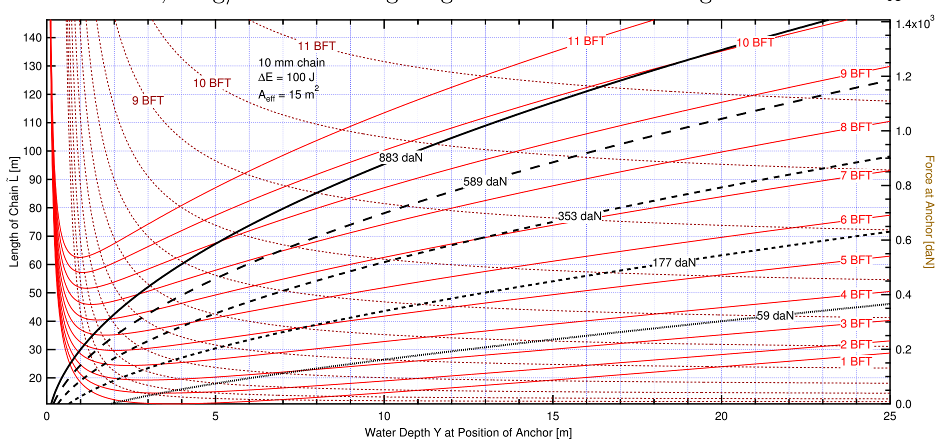

Fig. 25. Dynamisches Ankern für $\Delta E = 100\,\mathrm{J}$. In Abhängigkeit von der Ankertiefe Y und verschiedenen Windstärken für eine 10 mm Kette mit $A_{\mathrm{eff}} = 15\,\mathrm{m}^2$. Gewicht im Wasser: $m = 2\,\mathrm{kg/m}$. Rechts aufgetragen ist die am Anker angreifende Kraft F_A.

Kraft am Anker notwendig wird — sei es, weil der Anker im Untergrund nicht genügend gut hält, oder er schlicht an die Grenzen seiner Belastbarkeit kommt — muss man also auf größerer Tiefe ankern und entsprechend mehr Kette stecken.

Hierzu ein Beispiel anhand von Abb. (17): Der Wind bläst in Böen bis 7 BFT, und es soll eine kinetische Energie von 800 J noch von der 10 mm Kette aufgenommen werden können. Diese kinetische Energie entspricht einem 10 t Schiff mit einer Geschwindigkeit $v_{\|}$ von 0.4 m/s, also 0.78 Knoten. Der Anker kann aber laut Annahme nur 883 daN halten. Wenn man den Anker ignoriert, wäre das Optimum (mit minimaler Kettenlänge) auf ca 6 Meter Wassertiefe zu ankern und 81 Meter Kette zu stecken. Dies überfordert aber den Anker, da er hier 1060 daN verkraften müsste. Die maximal erlaubten 883 daN werden erst in einer Wassertiefe von 7.3 Metern unterschritten, und es ist dann marginal mehr Kette zu stecken, so 82 Meter Kette. Könnte der Anker nur 589 daN verkraften, müsste man schon auf 13 Meter Ankertiefe gehen und 90 Meter Kette stecken. Man sieht an diesem Beispiel deutlich, dass die verschiedenen Ankertiefen Y hier gar keinen großen Einfluss auf die benötigte Kettenlänge $\tilde{L}$ haben, wohl aber auf die am Anker angreifende Kraft F_A. Die gleiche Rechnung für die 12 mm Kette von Abb. (23) ergibt, dass die Ankertiefe nur unwesentlich geringer ist, aber die benötigte Kettenlänge $\tilde{L}$ deutlich abgenommen hat. Dies ist gut für den Schwoikreis, aber insgesamt rechnet es sich noch nicht vom Kettengewicht her. Die 12 mm Kette ist insgesamt schwerer als die 10 mm Kette, und bei gleichem Kettengesamtgewicht kann ich mit der 10 mm Kette auf größeren Tiefen ankern als mit der 12 mm Kette. Um einen möglichst großen Einsatzbereich gerade in Tidengewässern zu erzielen, sind also dünnere Ketten vorzuziehen.

Bei Multihulls wie Katamaranen und Trimaranen ist es üblich, mit einem Hahnepot das Schiff am Anker stabiler vor dem Wind auszurichten. Gerade bei der Betrachtung von Einträgen von kinetischer Energie in das System kann ein solcher Hahnepot eine wichtige Rolle spielen, um zumindest einen Teil der Energie aufzufangen. Dies erlaubt dann nicht nur eine ruhigere Lage des Schiffs, sondern auch mit etwas weniger Kette etwas dichter am Ufer zu ankern. Hier ein Beispiel: Ein Hahnepot von 10 Metern Länge wird verwendet. Bei den 7 BFT Grundlast im Beispiel von eben nehmen wir an, dass dieser Hahnepot sich um 5% oder $s = 0.5\,\mathrm{m}$ dehnt. Bei Grundlast liegt beim Anker mit 7 BFT, $A_{\mathrm{eff}} = 15\,m^2$ und einer 10 mm Kette nach Gl. (7) eine Last von 269 kp oder 264 daN an. Mit der Federgleichung $F = cs$ können wir damit die Federkonstante $c = 528\,\mathrm{daN/m}$ bestimmen und die im Hahnepot aufgenommene Energie mit $\frac{1}{2}cs^2$ zu 660 J berechnen. Um die zusätzlichen 800 J und damit insgesamt 1460 J im Hahnepot aufnehmen zu können, muss sich dieser auf $\sqrt{2E/c} = 0.74\,\mathrm{m}$ dehnen, was innerhalb üblicher maximaler Dehnbarkeiten ($< 10\%$) von guten Hahnepots liegt. Genau genommen sind in diesem Beispiel sogar 1600 J an Energie absorbiert worden, die eine Hälfte in der Kette, die andere im Hahnepot. Ein guter Hahnepot kann also einen entscheidenen Beitrag leisten, um die Effekte des dynamischen Ankerns z.T. abzufedern.

Ein Reitgewicht kann hier ebenfalls begrenzt etwas helfen, mehr Elastizität in die Kette zu bringen. Wenn es so positioniert wird, dass es im entlasteten Fall, wo nur der Grundwind weht, noch gerade am Seeboden aufliegt, aber andererseits beim Durchspannen der Kette sehr stark angehoben wird, kann es auch helfen, kinetische in potentielle Energie umzuwandeln. Allerdings sollte dieses Reitgewicht mindestens 10 kg wiegen, damit es überhaupt einen nennenswerten Effekt hat. Wenn so ein Reitgewicht um 2 Meter angehoben wird, entspricht dies nur einer zusätzlichen potentiellen Energie von $2 * 10 * 9.81 = 196\,\mathrm{J}$, also deutlich weniger, als der Hahnepot leisten kann.

Auch eine Kombination aus Kette und langer elastischer Trosse wird sehr vorteilhaft sein (siehe Hahnepot oben).

Wenn wir Abb. 24 und 20 /21 für eine 8 mm Kette oder Abb. 25 und 16/17 für eine 10 mm Kette miteinander vergleichen, sieht man sehr deutlich, welchen Effekt solche Massnahmen zur Reduzierung des Energieeintrags in die Kette bei kleinen Ankertiefen haben können.

Wenn all diese Massnahmen nicht reichen und immer noch überschüssige Energie aufgenommen werden muss, kann dies auch dadurch geschehen, dass der Anker etwas durch den Untergrund pflügt. Kraft mal Weg ergeben auch hier die geleistete Arbeit. Oder die Kette kommt vollkommen steif und das Vorschiff wird in das Wasser hinabgezogen. Auch dies ist eine Arbeit, die geleistet werden muss. Allerdings, in beiden Fällen wird der Anker und auch das restliche Ankergeschirr extrem beansprucht. Diese Situationen sind klar ausserhalb des diesem Kapitel zugrunde liegenden Modells.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass all diese Rechnungen in diesem Kapitel davon ausgehen, dass es nur *einen*, zeitlich isolierten Energieeintrag ΔE gibt, und dass dieser wieder abgebaut worden ist, bevor ein zweiter Energieeintrag stattfindet. Ist dies nicht der Fall, muss man beide Energieeinträge addieren.

9 Bringt eine Kette am Seeboden mehr Haltekraft?

Zum Schluss sei noch kurz der manchmal gegebene Rat analysiert, immer 20 – 30 Meter Kette am Meeresboden liegen zu haben, da dies die Haltekraft enorm erhöhe. Dies ist leider ein Trugschluss. Wenn man eine am Boden liegende Kette über denselbigen ziehen will, muss man eine gewisse Kraft aufwenden, die proportional zum Gewicht der Kette ist, um die Haftreibung zu überwinden — siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Reibungskoeffizient`. Der Proportionalitätsfaktor, häufig μ_H genannt, hängt vom Material der Kette und der Bodenbeschaffenheit ab. Öl, und in geringerem Maße auch Wasser, verringern die Haftung, und in der Regel findet man Werte $\mu_H < 1$, was bedeutet, dass eine Kette von 30 Metern Länge und 2 kg/m laufendem Gewicht im Wasser, nicht einmal 60 kg zusätzlich zum Anker zur Haltekraft beiträgt — sehr wahrscheinlich sogar deutlich weniger. Dieser Anker wird in einem guten Untergrund jedoch viele Hundert kg Haltekraft entwickeln, und somit ist der Effekt der auf dem Meeresboden liegenden Kette bezüglich zusätzlicher Haltekraft marginal. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, indem man einige Meter seiner Ankerkette einmal am Strand durch seichtes Wasser zieht und dann auf 30 Meter hochrechnet. Es bedarf keiner großen Kraft. Oder betrachten wir es einmal so: 60 kg Kettengewicht auf dem Boden, das ist nur das Doppelte oder Dreifache vom Ankergewicht, und bei diesem würde niemand ruhig schlafen, wenn der Anker nur einfach so auf dem Boden rumliegen würde ohne sich richtig eingegraben zu haben. Warum also sollten uns 60 kg Kette am Meeresboden beruhigen? An ihrer Reibungskraft am Untergrund liegt es nicht, es ist einzig die Tatsache, dass wir noch etwas Spielraum haben und der Wind somit also noch etwas zulegen darf, bevor die Kette nicht mehr waagerecht am Anker angreift. Oder Spielraum, welcher für das dynamische Ankern benötigt wird.

10 Zusammenfassung

Nun wissen wir also, wie der Mathematiker ankert! Obgleich — ein echter Mathematiker oder Theoretischer Physiker wird bei diesem Problem zunächst einmal auf sogenannte dimensionslose, skalierte Koordinaten transformieren, $(x, y) \to (x/a, y/a)$, da man dann zumindest für das statische Ankern nur noch eine einzige Kurve betrachten muss, die universale Kettenkurve. Für uns ist dies jedoch unpraktisch.

Für den Allgemeingebrauch ist wichtig zu wissen, dass die Faustregel “pro Meter Wassertiefe 3, 4, 5, 6 oder sogar 7 Meter Kette” nur einen Extremfall beschreibt, bei dem die Kette praktisch vollkommen straff gespannt ist und keinerlei Bauch mehr zeigt. Dafür braucht es einen starken Sturm oder eine extrem leichte Kette. Im Grunde besagt diese Faustregel also nur, dass wir hoffen, dass der Anker noch halten wird, wenn die Kette mit einer Steigung 1:3, 1:4, etc. am Anker ansetzt und anfängt selbigen aus dem Untergrund herauszuhebeln. Ob dies in einem Sturm passiert, hängt klarerweise vom Anker und vom Untergrund ab, und die Mathematik wird uns hier wenig weiterhelfen, zumal wir die genaue Form und Größe des Ankers nicht spezifiziert haben.

Eine Betrachtung der Kettenelastizität als Funktion des Verhältnis L/Y, also Kettenlänge zu Ankertiefe zeigt, dass die Kette in den zwei Extremfällen “sehr steil” oder “sehr flach” nicht gut funktioniert, da hier ihre Elastizität sehr klein ist. Dawischen gibt es einen Bereich, in dem die Kette optimal elastisch ist und damit gut funktioniert. Allein aus dieser Tatsache heraus ergibt sich schon, dass man bei Sturm nicht unbedingt in flaches Wasser ausweichen sollte (und wenn, dann nur mit sehr guten Kettenstropps oder Hahnepots). Es mag besser sein, bei Sturm gezielt in tieferes Wasser auszuweichen, mehr Kette zu stecken, und damit die Kette dichter an ihrem optimalen Arbeitspunkt zu betreiben. Dies gilt natürlich nur, wenn der Wind und Schwell am neuen Ankerplatz nicht viel schlimmer ist als am alten Ankerplatz.

Wir haben in diesem Beitrag zwei verschiedene Mechanismen beschrieben, die beim Ankern relevant sind. Das statische Ankern wird bestimmt durch eine Kraft, die auf das Schiff wirkt. Im Allgemeinen wird dies die Windkraft sein — auch die einer Böe — aber es kann auch ein starker Strom hiermit behandelt werden. Der zweite Mechanismus ist ein Energieeintrag in das Schiff, z.B. in einer starken Welle oder Schwell, welche in eine kinetische Energie umgesetzt wird. Das Schiff bewegt sich. Dies muss durch eine Erhöhung der potentiellen Energie der Kette absorbiert werden und wird als dynamisches Ankern bezeichnet. Für große Ankertiefen dominiert das statische Ankern, während bei geringen Ankertiefen irgendwann immer das dynamische Ankern entscheidend ist.

Das statische Ankern wird durch die Gleichungen (4), (5), (7) und (8) oder auch einfach durch die Abbildungen 7 – 11 beschrieben. Die von Sönke und Judith Roever propagierte Faustformel, Kettenlänge $L = Y + \text{Konstante}$, kann hierbei eine brauchbare erste Näherung sein bei größeren Wassertiefen Y und nur moderatem Wind. Allerdings hängt die Konstante sowohl von der Größe des Schiffes als auch von der Windstärke ab, und so ist es nicht viel aufwändiger, die genaue Formel zu verwenden. Mehr als Addieren, Multiplizieren und Wurzel ziehen ist es nicht, $L = \sqrt{Y(Y + 2a)}$, und man braucht den Parameter a nur einmal für sein Schiff zu tabellieren, wie z.B. in Tabelle 1.

Für das dynamische Ankern muss man zusätzlich zum Ergebnis des statischen Ankerns noch etwas mehr Kette stecken, beschrieben durch Gl. (31). Dieser Mechanismus, bei dem die kinetische Energie des Schiffs aufgrund von Wellen und Schwell in potentielle Energie der Kette transferiert wird, ist — sofern diese Energieeinträge "auf die Nase" des Schiffes kommen, was insbesondere bei auflandigem Wind der Fall ist — bei kleinen Ankertiefen dominierend. Dies kann dazu führen, dass die Kraft am Anker dessen Möglichkeiten übersteigt — sei es, wegen schlechten Untergrundes, sei es, weil der Anker einfach überfordert ist. Abhilfe schafft hier nur, auf größere Ankertiefen auszuweichen und dann etwas mehr Kette zu stecken. Mit Gl. (34) gibt es eine einfache Methode zu kontrollieren, ob man sich noch im erlaubten Bereich des $\tilde{L}$-Y Diagrams befindet, oder schon den Anker mit einer zu großen Last überfordert hat. Auch für das dynamische Ankern haben wir eine einfache Formel hergeleitet, welche ab ca 4 BFT sehr gut mit einer numerischen Lösung der Gleichungen übereinstimmt. Ein elastischer Hahnepot hilft, viel Energie zu absorbieren und ist daher insbesondere im flachen Wasser sehr hilfreich.

Für extrem kleine Ankertiefen versagt auch das dem dynamischen Ankern zugrunde liegende Model, und das System Schiff / Ankergeschirr wird andere Wege finden, die eingebrachte Energie wieder abzubauen — nicht immer zum Vorteil der Klampen und anderer Teile am Schiff...

In Tidegewässern muss man bei Ebbe darauf achten, nicht den Anker durch zu flaches Wasser zu überfordern (siehe Gl. (34)), und bei Flut, dass noch genügend Kette gesteckt ist, damit die Kette immer noch waagerecht am Anker angreift.

Wenn man nur für ein paar Tage ankert und weiß, wie das Wetter sich entwickeln wird und kein Sturm zu erwarten ist, dann muss man vielleicht nicht die für große Ankertiefen sehr konservative (und bei geringen Tiefen nicht ausreichende!!!) Sturmregel 1 : X nehmen, sondern kann die Formeln für statisches und dynamisches Ankern verwenden und auch auf ein paar Metern mehr Wassertiefe noch sorgenfrei ankern, wenn sonst kein Platz mehr frei ist.

Abschließend sei noch einmal betont, dass wir hier die *minimal* benötigte Kettenlänge ausgerechnet haben unter der Randbedingung, dass die Kette noch waagerecht am Anker angreift und selbiger somit maximal halten kann (und dies auch tut).

Der Autor bedankt sich herzlich bei Harald Melwisch und Gerhard Ohm für einen sehr fruchtbaren Gedankenaustausch zu diesem Thema.